РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИСТИТУТ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПРОБЛЕМ БИОЛОГИИ

На правах рукописи

Тетуев Руслан Курманбиевич

АЛГЕБРА СПЕКТРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В ЗАДАЧАХ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ

Специальность: 05.13.17 – Теоретические основы информатики

Диссертационная работа
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2007

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ…… 4
ГЛАВА I Аналитические преобразования над спектром……... 9
1.1 Общие свойства классических ортогональных систем…… 9
1.2 Основы спектрального представления функций…….. 14
1.3 Предпосылки к развитию новых методов спектральной обработки…… 17
1.4 Понятие спектрального преобразования функций……... 19
1.5 Задача поиска методов быстрых спектральных преобразований……. 21
1.6 Ранние попытки решения задачи. Матричный способ…… 22
ГЛАВА II Быстрые аналитические преобразования над спектром…… 27
2.1 Достаточное условие существования быстрых алгоритмов спектрального преобразования…… 27
2.2 Классические ортогональные полиномы…… 30
2.3 Быстрые преобразования для оператора вида $A(f) = xf(x)$*. Лемма о суперпозиции линейных операторов……* 33
2.4 Быстрые преобразования для операторов вида $A(f) = f(x)/x$*. Теорема обратимости линейных операторов……..* 35
2.5 Быстрые преобразования для оператора дифференцирования…….. 37
2.6 Быстрые преобразования для оператора интегрирования…… 38
2.7 Нахождение рекуррентных соотношений для различных модификаций ортогональных базисов…… 39
ГЛАВА III Общая вычислительная схема для реализации быстрых спектральных преобразований…….. 42
3.1 Определение спектрального каскада и диффузии…… 42
3.2 Метод спектрального каскада и диффузии……... 44
3.3 Пример применения метода каскада-диффузии…… 45
3.4 Сравнительный анализ результатов расчетов и основных характеристик алгоритмов…… 47
ГЛАВА IV Обобщения алгебры спектральных преобразований…….. 52
4.1 Быстрые нелинейные спектральные преобразования…….. 53
4.2 Быстрые спектральные преобразования для ортогональных систем дискретного аргумента…… 58
4.3 Сверхбыстрые спектральные преобразования на системах с параллельной архитектурой вычислений…… 63
ГЛАВА V Применение быстрых спектральных преобразований……..... 69
5.1 Применение в задачах распознавания образов…… 69
5.2 Применение в задачах биоинформатики…….... 73
ЗАКЛЮЧЕНИЕ……..... 77
ВЫВОДЫ…… 78
ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ……..... 80
ЛИТЕРАТУРА……... 82
ПРИЛОЖЕНИЯ……..... 84

ВВЕДЕНИЕ

Во введении обосновывается актуальность проблемы, сформулированы цели и задачи, дан краткий обзор содержания диссертации, перечислены полученные новые результаты исследования. На примере рассматриваемых систем ортогональных полиномов будут показаны основные приемы обработки и аналитического преобразования функций посредством изменения их спектральных представлений и рассмотрены перспективные подходы практической реализации подобных преобразований.

Актуальность темы

Во второй половине двадцатого столетия стремительное развитие вычислительной техники ознаменовало начало новой эры для всей математической теории и различных ее приложений. Возможность проведения множества элементарных операций на скоростных вычислителях требовала развития и адаптации математических методов решения задач к новым создавшимся условиям. Весьма скоро среди вычислительных машин наметился явный лидер – электронные вычислительные машины (ЭВМ) с целочисленным бинарным представлением величин и последовательным ходом выполнения операций. Это впоследствии всецело определило развитие соответствующей математической базы.

Специфика ЭВМ диктовала в то время свои условия, но целочисленные представления лишь отчасти, приближенно отвечали развитым к тому времени математическим, аналитическим понятиям и представлениям. Классическая техника математических вычислений привыкла оперировать понятиями вещественных чисел, аналитических функций, операций дифференцирования, интегрирования и т.д., однако попытки реализовать эти представления на вычислительных машинах приводили к необходимости решения довольно сложных, нетривиальных задач.

Представления функций в «электронном» виде и методы осуществления на ЭВМ элементарных аналитических операций над функциями (интегрирования, дифференцирования и т.д.) начали развиваться приблизительно в одно время, однако развитие этих задач протекало во многом независимо друг от друга, несмотря на их очевидное математическое «родство». С другой стороны можно предположить ряд факторов, видимо, послуживших этому причиной. Приведем ниже предпосылки, по нашему мнению, приведшие к такому разделению подходов и методов:

- матричное представление функций в виде массива дискретных значений, изначально оказалось наиболее естественным для ЭВМ представлением и наиболее удобным для реализации большинства арифметических операций над функциями;
- было предложено немало численных методов для осуществления более сложных, аналитических преобразований. С возникновением ЭВМ эти методы получили развитие и распространение. Явным преимуществом таких подходов явилась простота вычислений и скорость – обычно затраченное вычислительное время и объемы требуемой памяти были пропорциональны величине массива данных;
- спектральное представление произвольных сигналов как некоторых аналитических функций стало практически использоваться на ЭВМ намного позже, лишь после того, как в зарубежной и отечественной науке была разрешена основополагающая задача о быстром преобразовании Фурье (БПФ);
- до сих пор не было предложено универсальных и достаточно быстрых схем вычислений для осуществления аналитических преобразований над спектральными представлениями функций на практике. Предложенные ранее подходы сложны и сильно уступают по времени выполнения аналогичным преобразованиям функций, например, на основе численных методов.

Спектральное представление сегодня широко применяется, но большей частью для передачи, хранения и анализа данных, изначально полученных в виде массивов значений функций. Трудно переоценить влияние спектрального представления функций на развитие современной прикладной математики, однако на практике спектральное представление довольно редко используется для проведения определенных аналитических преобразований функций. В случае необходимости приходилось восстанавливать функцию в виде массива значений, а затем, проведя требуемые преобразованиями численно, снова «вернуть» функцию в спектральное представление. Однако, такая ситуация на наш взгляд не оправдана и как показано ранее, в ряде работ [1, 17], тем не менее, существует принципиальная возможность осуществления аналитических преобразований, при использовании лишь самих спектральных представлений функций или, иначе, их *спектральных преобразований*.

В перечисленных работах показано, что такой подход к тому же приводит к более приемлемым с практической точки зрения результатам в сравнении с теми, что были получены при осуществлении аналитических преобразований численными методами. Этот факт объяснен авторами свойствами высокой адаптивности метода при выборе базиса из семейства классических ортогональных полиномов, гладкостью аппроксимативного представления, заданного ограниченным ортогональным рядом и т.д.

Действительно, существенным недостатком численных методов является то, что практическая ценность результатов сильно зависит от вида преобразования и характера функции. К примеру, оказывается весьма сложным даже приближенное нахождение второй производной от функции, сильно искаженной помехами. В свою очередь, основным недостатком спектральных преобразований функций является то, что вычислительный процесс оказывается намного более сложным и громоздким. Алгоритмы оказались хуже на порядок по временной сложности, а также требующими стадии предварительных вычислений и резервирования больших объемов памяти под вспомогательные коэффициенты.

Указанные недостатки являются существенным ограничением для внедрения спектральных преобразований функций на практике в задачах, требующих проведения быстрых, устойчивых и точных аналитических преобразований функций, сигналов и т.д. Несмотря на положительные результаты, при решении практических задач лишь отставание во времени способно вынудить разработчиков программ отдать предпочтение в пользу более грубых, но быстрых алгоритмов.

Вышеописанное положение демонстрирует потребность в создании альтернативного простого и точного прикладного математического аппарата для осуществления быстрых спектральных преобразований функций, соответствующих ряду основных аналитических преобразований функций и групп их суперпозиций. В качестве ортогональных систем в работе рассмотрен каждый базис из семейства классических ортогональных полиномов (Лагерра, Якоби, Эрмита, Лежандра, Сонина-Лагерра, Гегенбауэра, Чебышева первого и второго рода) и некоторые основные модификации этих базисов. В главе IV показано, что без нарушения общности основные вычислительные схемы легко переносятся на случай применения классических ортогональных полиномов дискретного аргумента: Хана, Мейкснера, Шарлье, Кравчука и Чебышева.

Цель работы

Решение проблемы создания математического аппарата, для осуществления на вычислительных машинах быстрых аналитических преобразований функций, заданных на практике конечными ортогональными рядами. В качестве ортогональных базисов рассматриваются системы функций, построенные на классических ортогональных полиномах. В качестве операторов преобразования – основные, часто используемые преобразования: умножение/деление на аргумент, дифференцирования/интегрирования и т.д.

В соответствии с поставленной задачей определены **задачи диссертационной работы:**

1. Поиск общей вычислительной схемы спектральных преобразований рядов ортогональных полиномов.
2. Вывод требуемых аналитических соотношений для класса классических ортогональных полиномов и их некоторых модификаций.
3. Реализация программного комплекса для осуществления спектральных преобразований на практике.
4. Решение задачи контурного распознавания визуальных объектов средствами разработанной системы аналитических преобразований.
5. Решение задачи поиска тандемных повторов в геномах средствами разработанной системы аналитических преобразований.

Постановка научной задачи

Требуется найти группу алгебраических правил спектральных преобразований, соответствующих основным аналитическим преобразованиям функций, представленных ограниченными рядами, построенными на классических ортогональных полиномов. Найти решение при повышенных требованиях на вычислительную сложность реализуемых алгоритмов.

Научная новизна

В данной диссертационной работе впервые предложен вычислительный метод, позволяющий существенно понизить временную сложность вычислений над спектральным представлением функций, соответствующих ряду основных аналитических преобразований над функциями.

Сформулирована и доказана Теорема о достаточном условии существования алгоритма быстрого спектрального вычисления.

Показано соблюдение достаточного условия Теоремы для ряда линейных операторов и всех систем классических ортогональных полиномов и функций.

В ходе доказательств получены рекуррентные соотношения особого вида для полиномов Якоби, Гегенбауэра и функций Якоби, Гегенбауэра, Сонина-Лагерра, Лагерра, Чебышева первого и второго рода, Эрмита.

Сформулирована и доказана Теорема об обратимости линейных операторов, а также сформулирована и доказана Лемма о суперпозиции линейных операторов.

На основе применения спектральных преобразований предложено и реализовано вычисление инвариантных геометрических признаков, описанных аналитически с помощью операторов дифференцирования высоких порядков.

Найдены и применены аналитически описанные признаки, инвариантные к выбору начальной точки и вычисляемые на основе отрезков ортогонального ряда.

Реализован программный комплекс “SpectralRevisor”, организующий локализацию участков тандемных повторов в ДНК последовательностях на основе вычисления и анализа некоторых первых производных от функций-профилей, построенных на данных генетических последовательностях.

<u>Практическая значимость работы</u>

1) Предложенный метод сопоставляет некоторым часто используемым на практике аналитическим преобразованиям функций, набор простых и быстрых вычислений для получения соответствующего преобразования спектрального представления. Это позволяет применять метод в различных прикладных областях, где требуются быстрые, точные и устойчивые аналитические преобразования сигналов различной природы.
2) Показано, что для сложных преобразований функции, являющихся группой более простых, возможно построение единой вычислительной схемы, составленной на основе объединения соответствующих элементарных схем. При этом, многие частные вычисления в узлах выстраиваемой общей схемы, как показано в работе, могут быть произведены одновременно. Это позволит

дополнительно ускорить алгоритмы при реализации на ЭВМ с параллельной архитектурой исполнения команд, что в свою очередь позволит применять данный подход в задачах, сопряженных с необходимостью сверхбыстрой обработки данных:

i) обнаружение и распознавание визуальных образов в реальном времени на основе контурного восприятия;
ii) поиск тандемных повторов в сверхдлинных генетических последовательностях, таких, как геном человека ≈ 3 млрд. нуклеотидов и т.д.

3) В ходе выполнения диссертационной работы были получены новые аналитические соотношения для ряда базисов, построенных на классических ортогональных полиномах, что может быть полезным для последующих исследований и разработок в смежных областях науки.

С появлением и развитием систем параллельных вычислений увеличивается разрыв по времени исполнения между еще более ускорившимися, но по-прежнему не прибавившими в точности численными методами расчета с одной стороны и проведением аналитических преобразований функций посредством спектра с другой. В тоже время появился целый ряд успешных работ, посвященных проведению сверхбыстрого преобразования Фурье на системах параллельных вычислений. Однако, задача об ускорении самих спектральных вычислений, соответствующих определенным преобразованиям функций, оставалась по-прежнему актуальной как при реализации на вычислительных системах с последовательной, так и с параллельной архитектурой.

Диссертационная работа посвящена изложению и обсуждению нового вычислительного метода, предложенного на основании проведенных нами исследований и позволяющего существенно понизить временную сложность спектральных вычислений для ряда основных аналитических преобразований функций и групп их суперпозиций. Вычислительный метод основан на знании полученных рекуррентных соотношений определенного вида и приводит к алгоритмам той же временной сложности, что имеют алгоритмы, основанные

на использовании численных методов, то есть линейной и логарифмической для систем с последовательными и параллельными вычислениями соответственно. Очевидно, что при этом сохраняются иные преимущества спектрального подхода, такие как широкие адаптивные возможности при аппроксимации функций и более приемлемые с практической точки зрения результаты их преобразований. Заключительная часть работы посвящена изложению результатов применения предложенного метода в некоторых научных областях и сравнительному анализу с альтернативными подходами решения рассматриваемых задач.

Глава I
Аналитические преобразования над спектром

Первая глава представляет собой обзор литературы по теме работы. Она состоит из следующих параграфов:

1. Общие свойства классических ортогональных систем.
2. Основы спектрального представления функций.
3. Предпосылки к развитию новых методов спектральной обработки.
4. Понятие спектрального преобразования функций.
5. Задача поиска методов быстрых спектральных преобразований.
6. Ранние попытки разрешения задачи. Матричный способ.

1.1 Общие свойства классических ортогональных систем

Будем рассматривать системы ортогональных полиномов непрерывного аргумента, которые относятся к аналитическим функциям.

Их появление в XIX веке обусловлено систематическим изучением ортогональных систем полиномов в связи с развитием метода Фурье для решения краевых задач уравнений математической физики. Чрезвычайно важный класс ортогональных систем функций был предложен в середине XIX века русским математиком П.Л.Чебышёвым в его исследованиях по интерполированию способом наименьших квадратов [5]. В дальнейшем усилиями математиков различных стран (Франции, России, Германии и др.) открыты и хорошо изучены многие аналитические ортогональные системы полиномов, которые позже были объединены в группу классических ортогональных полиномов непрерывного аргумента [1,2,4,6], представленной в таблице 1.1.1. Рассматриваемые ортогональные системы широко

использовались для решения задач теоретической и математической физики. Это привело к тому, что многие авторы относят эту группу классических ортогональных систем к специальным функциям математической физики.

Во второй половине XX века советские математики А.Ф.Никифоров и В.Б.Уваров в книге “Специальные функции математической физики” [6] показали, что многие важные задачи теоретической и математической физики приводят к дифференциальному уравнению второго порядка

$$\sigma(z)y'' + \tau(z)y' + \lambda y = 0, \qquad (1.1.1)$$

где σ(z) и τ(z) - многочлены первого и второго порядка не зависят от n, а λ_n не зависит от *z* и определяется выражением

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma'' . \qquad (1.1.2)$$

Уравнение (1.1.1) называют дифференциальным уравнением гипергеометрического типа, а решениями уравнения (1.1.1) являются полиномы гипергеометрического типа $y_n(z)$ [6].

Уравнение (1.1.1) называют дифференциальным уравнением гипергеометрического типа, а решениями уравнения (1.1.1) являются полиномы гипергеометрического типа $y_n(z)$ [6].

Частными решениями уравнений вида (1.1.1) являются следующие классы специальных функций: классические ортогональные полиномы (полиномы Якоби, Сонина-Лагерра, Лагерра, Гегенбауэра, Чебышева I и II рода, Эрмита и др.), а также цилиндрические и гипергеометрические функции.

Ортогональные базисы в таблице 1.1.1 можно условно разделить на три группы, объединенные порождающими их формулами.

К первой группе относятся ортогональные базисы, которые задаются общей формулой Якоби и определены на промежутке [-1,1]. Эта общая формула имеет параметры *(α>-1, β>-1)*, конкретные значения которых в различных сочетаниях приводят как к известным ортогональным системам, так и к возможным другим.

№ п/п	Название многочлена	Обозначение	Общее выражение	Вес $\rho(x)$	Пределы существования	
1	Якоби или гипергеометрические	$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = 2^{-n}\sum_{m=0}^{n}\binom{n+\alpha}{\mathrm{m}}\binom{n+\beta}{\mathrm{n-m}}(x-1)^{n-m}\cdot(x+1)^m$	$(1-x)^\alpha\cdot(1+x)^\beta$ $\alpha>-1,\quad \beta>-1$	-1	1
2	Гегенбауэра или ультрасферические	$C_n^\lambda(x)$	$C_n^\lambda(x)=\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^m\Gamma(\lambda+n-m)}{\Gamma(m+1)\Gamma(n-2m+1)}(2x)^{n-2m}$	$(1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}$ $\alpha=\beta=\lambda-\frac{1}{2},\ (\lambda>-\frac{1}{2})$	-1	1
3	Чебышева I рода	$T_n(x)$	$T_n(x)=\frac{n}{2}\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^m(n-m-1)!}{m!(n-2m)!}(2x)^{n-2m}$	$(1-x^2)^{-0,5}$	-1	1
4	Чебышева II рода	$U_n(x)$	$U_n(x)=\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^m(n-m)!}{m!(n-2m)!}(2x)^{n-2m}$	$(1-x^2)^{+0,5}$	-1	1
5	Лежандра или сферические	$P_n(x)$	$P_n(x)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}$	1 $\alpha=\beta=0$	-1	1
6	Сонина - Лагерра	$L_n^\alpha(x)$	$L_n^{(\alpha)}(x)=\sum_{k=0}^{n}C_{n+\alpha}^{n-k}\frac{(-x)^k}{k!}$	$x^\alpha e^{-x}$	0	∞
7	Лагерра	$L_n(x)$	$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^{n-k}\frac{(-x)^k}{k!}$	e^{-x}	0	∞
8	Эрмита	$H_n(x)$	$H_n(x)=n!\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^m(2x)^{n-2m}}{m!(n-2m)!}$	e^{-x^2}	0	∞

Таблица 1.1.1. **Классические ортогональные полиномы непрерывного аргумента**

Так, если параметры $\alpha = \beta = 0$, то из формулы, задающей базис Якоби с точностью до постоянной, можно получить формулу, определяющую сферические ортогональные полиномы или полиномы Лежандра. При $\alpha = \beta = \pm 0,5$ из общей формулы базиса Якоби получают выражения, определяющие ортогональные полиномы Чебышева соответственно первого $(\alpha = \beta = -0,5)$ и второго $(\alpha = \beta = 0,5)$ рода. При $\alpha = \beta = \sigma - 0,5$ $(\sigma > -0,5)$ получают ультрасферические ортогональные полиномы (полиномы Гегенбауэра). Если же значения α и β выбираются произвольно (допустимый диапазон $-1 < \beta < \infty$, $-1 < \alpha < \infty$) в любых сочетаниях значений α и β, то можно получить большое разнообразие ортогональных базисов, относящихся к классическим, обладающих некоторыми общими свойствами, но имеющих различную форму полиномов и весовых функций, входящих в конкретный ортогональный базис.

Ко второй группе относятся ортогональные базисы Сонина-Лагерра и полиномы Лагерра. Они определены на промежутке $[0,\infty]$ и имеют в задающей их формуле параметр α. При $\alpha = 0$ формула определяет хорошо известные полиномы Лагерра. Задавая α в диапазоне $(-1 < \alpha < \infty)$, можно получить множество ортогональных базисов из семейства Сонина-Лагерра, отличающихся друг от друга формой полиномов и свойствами.

Наконец, последнюю группу образует ортогональный базис Эрмита, заданный на всей числовой оси $(-\infty < x < \infty)$. Обычно этот базис применяется при статистических исследованиях. Формула, задающая базис, не имеет в своем составе ни одного параметра. Поэтому эта группа представлена одним ортогональным базисом Эрмита.

Рассмотрим общие важные свойства классических ортогональных базисов.

1) Функции $\{\varphi'(x)\}$ образуют также ортогональную систему многочленов.

2) Функции $\varphi_n(x)$, принадлежащие к классическим ортогональным системам, удовлетворяют гипергеометрическому дифференциальному уравнению вида (1.1.1)

$A(x)y''+B(x)y'+\lambda_n y=0$, где $A(x)$ и $B(x)$ не зависят от n, а λ_n не зависит от x.

3) Имеет место обобщенная формула Родрига $\varphi_n(x)=\frac{1}{K_n\rho(x)}\frac{d^n\left[\rho(x)X^n\right]}{dx^n}$, где K_n – постоянная; X^n – многочлен, коэффициенты которого не зависят от n.

4) Любые три последовательных полинома из классических ортогональных полиномов одного базиса связаны между собой линейным соотношением [1,4], то есть имеет место рекуррентная формула, которая позволяет по двум известным полиномам определять однозначно третий полином.

5) Для всех ортогональных полиномов из числа классических весовая функция $\rho(x)$ - неотрицательна и интегрируема на отрезке $[a,b]$.

Любое из первых трех свойств характеризует классические ортогональные полиномы. То есть, система ортогональных полиномов, обладающая одним из этих первых трех свойств, может быть приведена к семейству классических.

Успешное решение задач аналитического описания информационных данных с привлечением аппарата классических ортогональных базисов основано на методе наименьших квадратов и обусловлено замечательными их аппроксимативными возможностями, которые с учетом использования ЭВМ позволяют по-новому организовать эффективный процесс обработки данных.

Важно заметить [7,8,9], что для всех рассматриваемых здесь ортогональных систем полиномов и функций из числа классических справедливо равенство Ляпунова-Стеклова:

$$\int_a^b f^2(x)dt=\sum_{n=0}^{\infty}A_n^2\,, \qquad (1.1.3)$$

$f(x)$ – аппроксимируемая функция;

A_n – коэффициенты разложения $f(x)$ по принятой системе ортогональных функций.

Последнее означает, что рассматриваемые ортогональные полиномы образуют полные (замкнутые) системы функций.

Сформулируем дополнительные свойства классических ортогональных базисов, которые определяют их значимость в задачах аналитической аппроксимации данных:

- полученную в эксперименте функциональную зависимость в виде непрерывной кривой или цифрового массива данных можно всегда описать аналитически отрезком ортогонального ряда с любой, наперед заданной точностью в среднеквадратичном или равномерном смысле;
- аналитическое представление сигнала (экспериментальных данных), в виде усеченного ортогонального ряда требует знания самого сигнала и не требует знания его производных или сведений о его гладкости;
- разложение сигнала осуществляется не в точке (ряды Тейлора), а на заданном промежутке, который может быть любым;
- разложение сигнала в ортогональный ряд в соответствии с равенством Ляпунова-Стеклова является жестким, то есть вычисление новых коэффициентов разложения для повышения точности аппроксимации не влияет на ранее вычисленные коэффициенты;
- члены разложения ортогонального ряда являются линейно независимыми;
- после описания исследуемого сигнала отрезком ортогонального ряда вся информация об этом сигнале содержится в коэффициентах разложения.

Широкому использованию классических ортогональных базисов в задачах аналитической аппроксимации информационных массивов, на наш взгляд, препятствовали следующие основные причины:

- фиксированная область существования [-1,1] большинства ортогональных базисов непрерывного аргумента неудобна для аналитической аппроксимации данных;
- отсутствие сведений о влиянии параметров, входящих в формулы, которыми задаются классические ортогональные базисы непрерывного или дискретного аргументов, на изменение свойств этих базисов, а также на изменение характера их весовых функций;
- трудности, связанные с вычислением коэффициентов разложения исследуемых сигналов по выбранному ортогональному базису;
- отсутствие рекомендаций по выбору наиболее подходящих ортогональных полиномов или функций в конкретных задачах;
- отсутствие практических способов определения оптимальных условий аппроксимации функций наиболее коротким усеченным ортогональным рядом;
- отсутствие сведений о сложности и возможности технической реализации спектральных анализаторов различных ортогональных базисов непрерывного аргумента.

Несмотря на это, максимальное использование положительных свойств классических ортогональных базисов и преодоление трудностей применения их в задачах аппроксимации данных открывают дополнительные возможности в создании новых эффективных методов аналитического описания и обработки информационных массивов.

Замечание. В математической литературе, особенно в справочной литературе, классические ортогональные системы полиномов и функций непрерывного аргумента приводятся в ненормированной форме.

Использование ненормированных систем функций в задачах аналитической аппроксимации нецелесообразно. Поэтому следует перед применением проверить их нормировку по формуле:

$$\|\varphi_n(x)\| = \sqrt{\int_a^b \varphi_n^2(x)\rho(x)dx}\ . \qquad (1.1.4)$$

Если данное выражение не равно единице, то $\varphi_n(x)$ – ненормированные функции и их следует подвергнуть нормировке по следующей формуле:

$$\varphi_n(x) = \frac{\overline{\varphi}_n(x)}{\sqrt{\int_a^b \overline{\varphi}_n{}^2(x)\rho(x)dx}}, \qquad (1.1.5)$$

где $\overline{\varphi}_n(x)$ – ненормированные функции, а $\varphi_n(x)$ – нормированные функции.

Пусть

$$\left(\varphi_i, \varphi_j\right) = \int_a^b \varphi_i(x)\cdot\varphi_j(x)\rho(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{если i} \neq \text{j} \\ 1, & \text{если i} = \text{j} \end{cases}. \qquad (1.1.6)$$

Последовательность таких функций называется ортонормированной. В дальнейшем в процессе работы следует внимательно проверять выполнение условий нормировки ортогональных систем полиномов и функций.

1.2 Основы спектрального представления функций

В данной главе изложены основные принципы спектрального анализа, использованные автором при построении нового подхода к преобразованию функций в пространстве коэффициентов разложения. Иными словами, если функция представлена в виде некоторого спектрального разложения. Действительно, широко известно [10], что

каждую функции $f(x)$ непрерывного аргумента x из класса интегрируемых с квадратом функций $f(x) \in L_\rho^2(a,b)$:

$$\int_a^b f^2(x)\rho(x)dx < +\infty ,$$

можно представить, причем однозначно [17, 18], в виде ряда:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \varphi_n(x) ,$$

если предполагать, что система функций непрерывного аргумента $\{\varphi_n(x)\}$ является полной и ортогональной на интервале (a,b):

$$(\varphi_n, \varphi_m) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n \neq m ,$$

где (f,g) – скалярное произведение функций пространства $L_\rho^2(a,b)$, определяемое через его весовую функцию $\rho(x)$:

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx .$$

Оказывается, что подобное представление произвольных функций пространства $L_\rho^2(a,b)$ более выгодно и удобно использовать для различных целей теоретического и прикладного характера. В данной работе рассматриваются проблемы, возникающие при оперировании со спектральными представлениями функций в ряде практических задач.

Заметим, что на практике функция $f(x)$ известна нам в виде некоторого ограниченного, дискретного массива значений. Поэтому, спектральный вид функции дискретного аргумента, вследствие теоремы Уитеккера-Котельникова-Шенона, может быть представлен ограниченным, а не бесконечным рядом:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N-1} C_n \varphi_n(x) ,$$

где N – количество известных значений функции $f(x)$.

Вообще, подобный ряд часто ограничивают числом K, меньшим, чем возможный верхний предел N, но при этом представленная таким «укороченным» рядом функция все же остается приближенно равной $f(x)$:

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{K-1} C_n \varphi_n(x),$$

где $K < N$.

В подобных случаях говорят об аппроксимации или приближенном спектральном представлении функции. Проиллюстрируем возможности аппроксимации функций на следующем примере.

Пример 1: При решении некоторой научно-исследовательской задачи (параграф 5.2) нами получено дискретное представление функции (рис. 1.2.1). Итак, в нашем распоряжении дискретное представление ортогональных полиномов Чебышева I рода $\{T_n(x)\}$ (рис. 1.2.2).

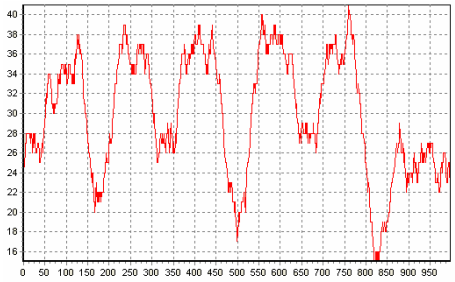


Рис. 1.2.1

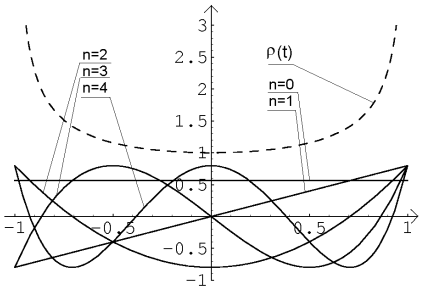


Рис. 1.2.2

Количество известных значений функции (отсчетов функции) равно $N = 1000$. Имеем возможность полностью восстановить все значения рассматриваемой функции при наличии всего спектра, т.е. при наличии всех возможных коэффициентов разложения: $\{C_0, C_1, ..., C_{999}\}$ (рис. 1.2.6). Однако, даже наличие первых коэффициентов часто дает удовлетворительные приближения функции. Так аппроксимации на рисунках 1.2.3, 1.2.4, 1.2.5 были получены соответственно при наличии 10, 20 и 100 коэффициентов разложения.

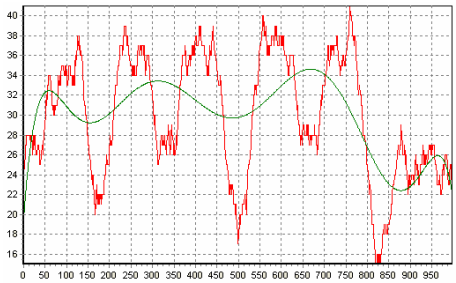


Рис. 1.2.3

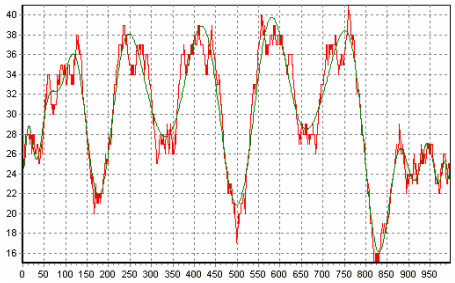


Рис. 1.2.4

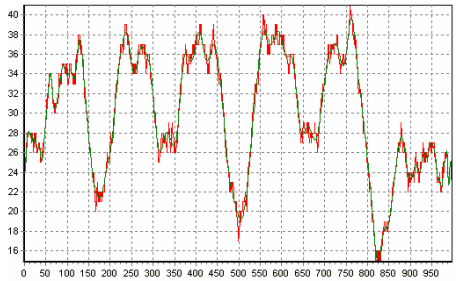


Рис. 1.2.5

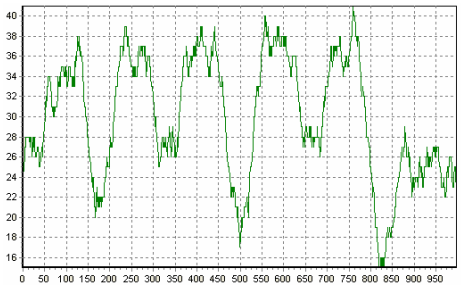


Рис. 1.2.6

1.3 Предпосылки к развитию новых методов спектральной обработки

Несмотря на явные замечательные аппроксимативные свойства спектрального представления функций, надо заметить, что существует немало других подходов для приближенного описания функций, таких как метод наименьших квадратов, сплайнов и т.д. Для множества практических задач наиболее приемлемым оказался все же именно спектральный подход, будучи оптимальным решением по простоте реализации, скорости вычислений и качеству результатов.

Одним из важнейших свойств, определяющих необходимость развития спектральных методов, при обработке информационных данных, безусловно, является свойство взаимной ортогональности используемых систем функций (1.2.1), благодаря чему коэффициенты разложения $\{A_n\}$

можно вычислять независимо друг от друга по формулам (1.2.7, 1.2.9). Именно свойство ортогональности позволило избавиться от взаимосвязи коэффициентов разложения и упростило расчеты при решении различных задач.

Однако при переходе к цифровым вычислениям на ЭВМ приходится заменять вычисление, например, интеграла (1.2.7) вычислением суммы

$$A_n = \sum_{i=0}^{M-1} f(x_i) L_n(x_i) \rho(x_i) \Delta x_i \qquad (2.1.1)$$

где Δx_i – некоторый шаг значений аргумента на сетке

$$a = x_0 < x_1 ... < x_{M-1} = b\,. \qquad (2.1.2)$$

При этом, как известно, чем меньше приращения аргумента Δx_i, тем ближе значение суммы (2.1.1) к величине интеграла (1.2.7). Но для этого, естественно, приходится увеличивать количество узлов сетки M, а это в свою очередь приводит к неминуемому появлению ошибок округлений и росту времени вычислений при реализации формул типа (1.2.7, 1.2.9), например, по правилу Симпсона или же других частных случаев квадратурной формулы Ньютона-Котеса. Стало ясно, что в этом случае важной задачей является поиск такой сетки вида (2.1.2) минимальной длины M, для которой наиболее точно соблюдалось бы “цифровое” условие ортогональности

$$\sum_{i=0}^{M-1} \varphi(x_i) \varphi(x_i) \rho(x_i) \Delta x_i = 0\,. \qquad (2.1.3)$$

Над решением этой ключевой задачи в свое время много работали отечественные и зарубежные исследователи, которым удалось доказать существование для систем из N ортогональных функций сеток минимальной длины $M = N$, на которых соблюдается условие (2.1.3) наиболее точно, и предложить практический способ построения сеток. При этом, вообще говоря, сетка может оказаться неравномерной, так как ее

узлы должны в точности совпадать с нулями $(N+1)$ функции рассматриваемой ортогональной системы. Этот результат основан на так называемой квадратурной формуле наивысшей алгебраической степени точности (формуле Гаусса) [10].

На сегодня квадратурная формула Гаусса является основой для осуществления на современных вычислительных машинах Быстрого Преобразования Фурье (БПФ). Благодаря этому стало возможно осуществление на практике быстрого разложения функций различной природы с глубиной спектрального разложения вплоть до нескольких тысяч [11, 12].

Как уже говорилось во *Введении*, трудно переоценить значение квадратурной формулы Гаусса в сложившихся на сегодня и развивающихся областях науки и техники, в особенности, тех, что тесно связаны с вычислительными машинами, компьютерами. Однако использование спектральных методов ранее часто сводилось лишь к анализу данных, аппроксимативному хранению и редко для осуществления различных преобразований данных. В действительности, если необходимо было осуществить некоторое преобразование функции, то приходилось восстановить (точно или приближено) все ее значения и уже затем, произведя преобразование над ее значениями с помощью численных методов, заново разложить получившийся результат (функцию) в новое спектральное представление.

В этом свете сложно было бы не обратить внимания на одно очень привлекательное и аналитически обусловленное свойство спектрального представления функций. Оказывается, что множество преобразований над функциями фактически можно осуществить, используя лишь коэффициенты разложения функции. Несмотря на очевидные преимущества такой подход долгое время не находил широкого

применения для решения практических задач. Это обусловлено главным образом тем, что предложенные до сих пор способы осуществления соответствующих вычислений оказывались весьма трудоемкими и слишком длительными по времени исполнения, как это будет показано в параграфе 1.6.

1.4 Понятие спектрального преобразования функций

Прежде, чем определить ключевое понятие *спектральных преобразований функций,* полезно было бы остановиться подробнее на рассмотрении взаимосвязи между функциями и их спектральными представлениями.

Для произвольной функции принадлежность к функциональному пространству $L^2_\rho(a,b)$ определяет условие:

$$\int_a^b f^2(x)\rho(x)dx < \infty . \qquad (2.2.1)$$

Тогда, осуществив над функцией $f(x) \in L^2_\rho(a,b)$ преобразование Фурье $U(f)$, представим функцию в спектральном виде как вектор значений $\{A_n\}$:

$$A_n = U(f;n) = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)\rho(x)dx . \qquad (2.2.2)$$

Можно показать преобразование в символьной форме:

$$f(x) \xrightarrow{U} \{A_n\} . \qquad (2.2.3)$$

Сам вектор значений

$$\{A_n\} = \overline{(A_0, A_1, ..., A_N, ...)} \qquad (2.2.4)$$

можно представить в виде суммы

$$\overline{(A_0, A_1, ..., A_N, ...)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \overline{e_n} , \qquad (2.2.5)$$

где $\overline{e_0} = \overline{(1,0,0,...)}$, $\overline{e_1} = \overline{(0,1,0,...)}$, $\overline{e_2} = \overline{(0,0,1,...)}$ – единичные векторы некоторого, вообще говоря, бесконечномерного векторного пространства H.

И обратно, спектральное представление $\{A_n\} \in H$ можно представить в виде функции $f(x)$, осуществив обратное преобразование U^{-1}:

$$f(x) = U^{-1}(\{A_n\}; x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \varphi_n(x) \qquad (2.2.6)$$

или, в символьной форме,

$$f(x) \xleftarrow{U^{-1}} \{A_n\}. \qquad (2.2.7)$$

Таким образом, получили взаимосвязь функции $f(x)$, как элемента некоторого пространства функций $f(x) \in L_\rho^2(a,b)$, и спектрального представления $\{A_n\} \in H$, как элемента некоторого бесконечномерного векторного пространства H. Здесь важно знать, что преобразование Фурье U является взаимно однозначным. Иными словами, каждой функции соответствует единственный вектор, и наоборот:

$$\{A_n\} \Leftrightarrow f(x). \qquad (2.2.8)$$

Отсюда легко заключить, что любое нетривиальное изменение функции неминуемо вызовет изменение соответствующего ей спектрального представления и, что для нас важнее, обратно, любое нетривиальное изменение коэффициентов разложения приведет к изменению спектра, соответствующего исходной функции.

Определение *(спектрального преобразования функций)*: Пусть функции $f(x), g(x) \in L_\rho^2(a,b)$ связаны преобразованием $A(\,)$:

$$g(x) = A(f(x)) \qquad (2.2.9)$$

и $\{C_n\}, \{D_n\} \in H$ – соответствующие им спектральные представления:

$$f(x) \xrightarrow{U} \{C_n\}, \qquad (2.2.10)$$

$$g(x) \xrightarrow{U} \{D_n\}. \qquad (2.2.11)$$

Тогда алгебраическое правило $B(\,)$, задающее преобразование

$$\{D_n\} = B(\{C_n\}) \qquad (2.2.12)$$

для любой пары функций (2.2.10, 2.2.11) будем называть *внутриспектральным преобразованием функции*, соответствующим оператору $A(\,)$.

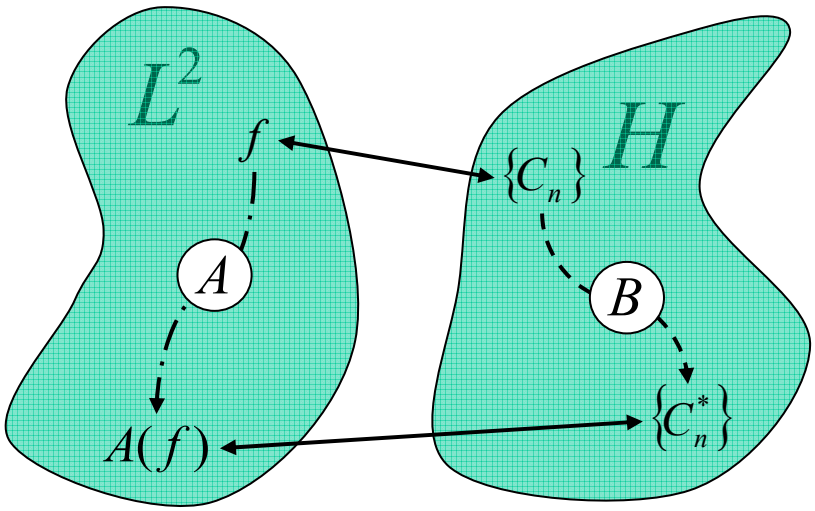


Рис. 1.4.1 Преобразование спектра B в пространстве H, соответствующее преобразованию функции-оригинала A, производимому в пространстве L^2.

1.5 Задача поиска методов быстрых спектральных преобразований

На сегодня универсальный математический аппарат, позволяющий нахождение оптимального правила $B(\,)$ для произвольных пары функций (2.2.10, 2.2.11) и преобразования $A(\,)$ пока не разработан. С другой стороны, так как для каждого рассматриваемого преобразования может существовать несколько различных правил, предложим классификацию математических методов, применяемых для решения подобных задач, по степени основных допущенных ограничений:

- ✓ ограничение класса рассматриваемых функций;
- ✓ ограничение класса рассматриваемых базисов;
- ✓ ограничение класса рассматриваемых преобразований;
- ✓ ограничение реализуемости на вычислительных устройствах.

Постановка задачи: Требуется найти группу алгебраических правил для численного осуществления внутриспектральных преобразований, соответствующих классу основных аналитических линейных преобразований функций при повышенных требованиях на временну́ю и вычислительную сложности реализуемых алгоритмов. При этом предполагается, что функции представлены отрезками рядов, построенными на системах классических ортогональных полиномов.

В результате проведенных исследований удалось успешно разрешить данную ключевую проблему, получив аналитически развитый аппарат для быстрого осуществления множества основных линейных и ряда нелинейных преобразований функций в пространстве коэффициентов разложения на основе рекуррентных соотношений особого вида. Ниже будет показано, как данная задача была разрешена в частном случае для некоторых преобразований и систем ортогональных полиномов Сонина-Лагерра. В действительности же представленные ниже разработанные приемы могут быть по аналогии применены при выводе рекуррентных соотношений вида (2.4.3) для каждой из систем классических ортогональных полиномов.

1.6 Ранние попытки решения задачи. Матричный способ

В предыдущем параграфе упоминается, что каждый вектор значений $\{C_n\}$ однозначно сопоставлен некоторой функции $f(x)$:

$$f(x) \Leftrightarrow \{C_n\}, \tag{1.6.1}$$

и таким образом, делается заключение о том, что любое изменение функции вызовет изменение соответствующего ей спектрального представления и наоборот. Здесь покажем основные ранее известные

правила для выполнения действий над коэффициентами разложения, соответствующие различным преобразованиям функций.

Рассмотренные нами выше пространства: пространство измеримых функций $L_\rho^2(a,b)$ (в этом параграфе ради удобства дополнительно потребуем соблюдения условия ортонормированности базиса):

$$\int_a^b \varphi_n^2(x)\rho(x)dx = 1,$$

и бесконечномерное векторное пространство H, образованное системой единичных векторов

$$\overline{e_0} = (1,0,0,...), \overline{e_1} = (0,1,0,...), \overline{e_2} = (1,0,0,...), \quad \ldots$$

по сути, являются двумя, наиболее известными, примерами так называемых *гильбертовых* пространств. По этой причине каждое свойство, относящееся к определению гильбертова пространства, естественно, имеет эквиваленты, как для $L_\rho^2(a,b)$, так и для H.

Далее будет намного проще выявлять аналогии между действиями в одном гильбертовом пространстве и действиями в другом, если иметь представление об элементарных, определенных в этом случае, взаимосвязях, например, в следующем табличном виде:

Пространство функций $L_\rho^2(a,b)$	Пространство векторов H
Скалярное произведение элементов пространства:	
$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx$	$(C,D) = C_0D_0 + C_1D_1 + ...$
Норма элемента пространства:	
$\lVert f \rVert = \sqrt{(f,f)}$	$\lVert C \rVert = \sqrt{(C,C)}$
Условие принадлежности пространству элемента:	
$\lVert f \rVert < \infty$	$\lVert C \rVert < \infty$

Таблица 1.6.1

В первую очередь, обратим внимание на класс преобразований, результатом действия которых могут оказаться функции, лежащие вне рассматриваемого нами функционального пространства и проследим за существующей между пространствами $L_\rho^2(a,b)$ и H взаимной связью. Итак, условие $f(x) \in L_\rho^2(a,b)$ тождественно условию существования и конечности значения интеграла

$$\int_a^b f^2(x)\rho(x)dx < \infty . \qquad (1.6.2)$$

Интересно, что согласно [10, 17, 18] для ортонормированных систем имеем равенство

$$\int_a^b f^2(x)\rho(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^2 . \qquad (1.6.3)$$

В тоже время в определении гильбертова пространства, возникшем еще на рубеже 19-20 вв. [10], используется условие конечности длины вектора $\{C_n\}$ бесконечномерного векторного пространства H:

$$C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + ... < \infty . \qquad (1.6.4)$$

Сопоставив (1.6.2) и (1.6.4) и наблюдая явную связь через соотношение (1.6.1, 1.6.3), приходим к очевидному выводу, что если результат преобразования $A(\,)$ есть функция, лежащая вне рассматриваемого функционального пространства, то вектор коэффициентов разложения этой функции окажется также бесконечным по длине. Ясно, что под квадратом длины вектора подразумеваем сумму квадратов коэффициентов спектра. Наоборот, если в свою очередь результатом преобразования $B(\,)$ окажется вектор, не принадлежащий пространству H, то ему также не будет соответствовать ни одна функция из пространства $L_\rho^2(a,b)$.

С другой стороны, если изменение коэффициентов разложения $\{C_n\}$, произведенное по некоторому определенному правилу, привело к результату такому, для которого условие (1.6.3) остается справедливым, то соответственно также по-прежнему соблюдено условие (1.6.2) и мы тем самым определяем этим изменением некоторое преобразование первоначальной функции. Например, можно поменять местами соседние четные и нечетные значения вектора коэффициентов разложения или произвести определенным образом их взвешенное суммирование. Что мы получим в каждом конкретном случае, как функция-результат будет связана с функцией-оригиналом, можно ли найти преобразование коэффициентов, соответствующее в точности заданной аналитической связи между функциями?

Ответы на эти вопросы, безусловно, зависят от характера самого преобразования, самой аналитической связи и от рассматриваемых ортогональных систем. Начнем с самых простых примеров: элементарных линейных преобразований, составляющих основы функционального анализа и ортогональных систем, известных широкому кругу исследователей.

Предположим, нам требуется вычислить некоторую функцию $h(x)$, являющуюся взвешенной суммой некоторых функций $f(x)$ и $g(x)$:

$$h(x) = \lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)$$

(λ_1, λ_2 – некоторые константы),

что на практике, при вычислениях на некоторой сетке

$$a = x_0 < x_1 ... < x_{N-1} = b,$$

будет выглядеть как последовательное взвешенное суммирование двух массивов:

$$h(x_i) = \lambda_1 f(x_i) + \lambda_2 g(x_i). \qquad (1.6.5)$$

Ясно, что эти функции представлены спектральными представлениями в виде конечных векторов

$$f(x) \Leftrightarrow (C_0, C_1, ..., C_K),$$
$$g(x) \Leftrightarrow (D_0, D_1, ..., D_K)$$

длины $K \le N$ и требуется найти также спектральное представление для функции $h(x)$, определенной соотношением (1.6.5), в виде вектора

$$h(x) \Leftrightarrow (E_0, E_1, ..., E_K).$$

Ввиду того, что преобразование Фурье $U(f)$ определяется линейным оператором (1.6.5) легко придти к выводу, что

$$E_n = \lambda_1 C_n + \lambda_2 D_n .$$

Таким образом, очевидно, что элементарные операции (умножение на скаляр и суммирование), определенные в обоих гильбертовых пространствах, абсолютно идентичны, т.е. результаты действий в одном из пространств соответствует той же группе действий, произведенных во втором пространстве.

Другой элементарной операцией, определенной в гильбертовых пространствах, является вычисление нормы элементов, но согласно (1.6.3) находим, что значения нормы, вычисленные в одном из рассматриваемых нами пространств, всегда совпадают со значениями, вычисленными в другом, т.е.

$$\|f(x)\| = \|\overline{C}\| .$$

Этот замечательный вывод позволит связать традиционную метрику векторного пространства:

$$\rho(\overline{C}, \overline{D}) = \sqrt{(C_0 - D_0)^2 + (C_1 - D_1)^2 + ...} = \|\overline{C} - \overline{D}\|,$$

с метрикой, обычно определяемой в функциональном пространстве, часто называемой также среднеквадратичной ошибкой:

$$\varepsilon(f, g) = \sqrt{\int_a^b (f(x) - g(x))^2 \rho(x) dx} = \|f - g\|,$$

так как, согласно (1.6.3), значения метрик будут также совпадать, т.е.

$$\rho(\overline{C},\overline{D}) = \varepsilon(f,g).$$

Как можно видеть, на практике будет даже иметь место подобие алгоритмов для вычислений в функциональном пространстве:

$$\varepsilon(f,g) = \sqrt{\sum_{n=0}^{N-1}(f_n - g_n)^2 w_n},$$

где $w_n = \rho(x_n)\Delta x_n$,

и, в общем виде, для вычислений в векторном пространстве:

$$\rho(\overline{C},\overline{D}) = \sqrt{\sum_{n=0}^{K-1}(C_n - D_n)^2 \varpi_n} \qquad (1.6.6)$$

где $\varpi_n = \|\varphi_n(x)\|^2$.

Основываясь на последнем утверждении, легко получим правило сравнения произвольных функций в пространстве коэффициентов разложения. Насколько это позволит повысить производительность вычислений можно продемонстрировать на следующем примере:

Пример 1: Пусть в ходе некоторой исследовательской работы было получено $M = 500$ функций, каждая из которых имеет протяженность в $N = 1000$ значений. Пусть далее ввиду больших объемов данных, присутствия значительных помех и избыточности представления принято решение хранить функции не в табличном, а в сглаженном, спектральном виде, в виде векторов коэффициентов разложения размерности $K = 200$, полученных при разложении функций по некоторому ортонормированному базису.

Требуется из всего множества найти такую тройку функций $f(x), g(x), h(x)$, для которых соблюдалось бы условие

$$\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x) + \lambda_3 h(x) = 0$$

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \text{ – некоторые константы}) \qquad (1.6.7)$$

наиболее точно в смысле среднеквадратичного отклонения.

Очевидно, что для решения данной задачи потребуется многократное вычисление нормы левой части равенства (1.6.7), для каждого из возможных сочетаний функций. Исходя из (1.6.3) и (1.6.6) легко удается оценить порядок временной сложности алгоритмов при реализации вычислений в каждом из пространств. Приходим к заключению о том, что они будут иметь одинаковый, линейный порядок временной сложности: для векторного пространства он будет равен $O(N)$, а для функционального – $O(K)$. Но, если $K << N$, вычисления, проводимые в векторном пространстве коэффициентов разложения, будут протекать в несколько раз ($N/K = 5$) быстрее. Ввиду того, что потребуется многократно повторять данную операцию, общим числом

$$M(M-1)(M-2) = 124\,251\,000,$$

очевидно преимущество спектрального подхода и явный временной выигрыш в решении таких задач. Дополнительным преимуществом, безусловно, является отсутствие необходимости восстановления функций перед тем, как производить требуемые действия.

Глава II
Быстрые аналитические преобразования над спектром

Вторая глава посвящена описанию основных этапов разработки нового вычислительного подхода в задаче аналитического преобразования функций на практике. Здесь сформулированы и доказаны две теоремы и одна лемма, на основании которых предложен новый метод спектральных преобразований, основанный на комбинации двух введенных здесь правил расчетов на отрезках ортогональных рядов. Для обозначения правил и вычислительного метода предложена терминология: *правило каскада и правило диффузии спектральных коэффициентов, метод спектрального каскада-диффузии.*

2.1 Достаточное условие существования быстрых алгоритмов спектрального преобразования

Изложив выше основные ранние сложившиеся принципы преобразования спектра, мы приходим к выводу о необходимости поиска нового способа вычислений, позволившего принципиальное снижение времени исполнения соответствующих алгоритмов. Как будет показано ниже, данная задача была успешно разрешена в диссертационной работе, но только для ряда широко используемых преобразований и некоторого подмножества ортогональных базисов – классических ортогональных полиномов.

Алгоритмы быстрой спектральной обработки основаны на знании рекуррентных соотношений особого вида. Потому существование алгоритмов быстрой обработки напрямую связано с существованием самих рекуррентных соотношений. Сформулируем данную связь в общем виде как достаточное условие существования быстрых алгоритмов:

Теорема 1: *Пусть* $f(x)$ *- некоторая функция пространства* $L^2_\rho(a,b)$ *и* $\{\varphi_n(x)\}$ *– система ортогональных функций того же пространства, такая что:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N+1} C_n \varphi_n(x). \qquad (2.4.1)$$

Пусть далее $A(\ )$ *- некоторый линейный оператор, такой что* $A(f) \in L^2_\rho(a,b)$ *и*

$$A(f) = \sum_{n=0}^{N+q} C_n^* \varphi_n(x). \qquad (2.4.2)$$

Тогда, если для каждого $\varphi_{n+1}(x)$ *существует рекуррентное соотношение вида*

$$A(\varphi_{n+1}) = F_n\big(A(\varphi_n),\ldots,A(\varphi_{n-d}),\varphi_{n+q},\ldots,\varphi_{n-p}\big), \qquad (2.4.3)$$

где $F_n(\ldots)$ *- линейная форма,*

$$d,q,p = const \in \mathbf{N},$$

то существует алгоритм линейной временной сложности для вычисления коэффициентов разложения $\{C_n^*\}$ *при известных* $\{C_n\}$.

<u>*Доказательство:*</u> *Построим доказательство теоремы на основе вывода принципиальной схемы вычислительного процесса с использованием рекуррентных соотношений вида (2.4.3) и проведения оценки временной сложности полученного общего алгоритма.*

Линейную форму $F_n(\ldots)$ *для определенности выпишем в следующем виде:*

$$F_n\left(A(\varphi_n),\ldots,A(\varphi_{n-d}),\varphi_{n+q},\ldots,\varphi_{n-p}\right)=\sum_{k=-d}^{0}\alpha_{n,k}A(\varphi_{n+k})+\sum_{k=-p}^{q}\beta_{n,k}\varphi_{n+k}, \qquad (2.4.4)$$

где $\alpha_{n,k}, \beta_{n,k}$ *- некоторые константы.*

Воспользовавшись свойством линейности оператора A*, представим* $A(f)$*:*

$$A(f)=A\left(\sum_{n=0}^{N+1}C_n\varphi_n\right)=\sum_{n=0}^{N+1}C_nA(\varphi_n)=C_{N+1}A(\varphi_{N+1})+\sum_{n=0}^{N}C_nA(\varphi_n). \qquad (2.4.5)$$

Далее, основываясь на рекуррентном соотношении (2.4.3), предложим замену

$$C_{N+1}A(\varphi_{N+1})=\sum_{k=-d}^{0}\alpha_{N,k}C_{N+1}A(\varphi_{N+k})+\sum_{k=-p}^{q}\beta_{N,k}C_{N+1}\varphi_{N+k} \qquad (2.4.6)$$

и тогда получим

$$A(f)=\sum_{n=0}^{N+1}C_nA(\varphi_n)=\sum_{k=-p}^{q}\beta_{n,k}C_{N+1}\varphi_n+\sum_{n=0}^{N}\overline{C}_nA(\varphi_n), \qquad (2.4.7)$$

где

$$\overline{C}_n=\begin{cases} C_n, & \text{при } 0\le n<N-d; \\ C_n+\alpha_{N,N-n}C_{N+1}, & \text{при } N-d\le n\le N. \end{cases} \qquad (2.4.8)$$

Как видим, нам удалось уменьшить длину ряда, линейно представленного через функции $A(\varphi_n)$*, преобразовав при этом лишь его старшие* $(d+1)$ *коэффициента, и выделить из него подряд, определенный через систему* $\{\varphi_n\}$ *длиной не более* $(q+p+1)$ *элементов. Очевидно, что возможно дальнейшее уменьшение длины ряда от функций* $A(\varphi_n)$ *и пополнение ряда от функций* φ_n *в виде рекурсивного вычислительного процесса.*

Шаг за шагом проделывая вышеуказанные действия на основании рекуррентных соотношений (2.4.3), очевидно, завершим процесс на $(N+1)$*-ом шаге:*

$$\sum_{k=-p}^{q}\beta_{N,k}C_{N+1}\varphi_{N+k}+\sum_{n=0}^{N}\overline{C}_nA(\varphi_n)=\sum_{k=-p}^{q}\left(\beta_{N,k}C_{N+1}\varphi_{N+k}+\beta_{N-1,k}\overline{C}_N\varphi_{N-1+k}\right)+$$
$$+\sum_{n=0}^{N}\overline{\overline{C}}_nA(\varphi_n)=\ldots=\sum_{n=0}^{N+q}C_n^*\varphi_n(x) \qquad (2.4.9)$$

и получим искомое представление преобразования $A(f)$ *в виде ряда по системе ортогональных функций* $\{\varphi_n\}$*:*

$$A(f) = \sum_{n=0}^{N+q} C_n^* \varphi_n(x). \qquad (2.4.10)$$

Показав принципиальную возможность расчета представления (2.4.10) на основании рекуррентных соотношений, оценим вычислительную сложность соответствующего алгоритма. Найдем время исполнения T *для данного вычислительного процесса, проанализировав общую схему действий:*

$$T = (d + p + q + 2)(\tau_1 + 2\tau_2 + 2\tau_3)(N + 1), \qquad (2.4.11)$$

где $\tau_1, \tau_2, \tau_3 = const$ *- время выполнения элементарных операций: произведения, суммирования и присвоения соответственно. Отсюда приходим к выводу о линейной временной сложности построенного вычислительного процесса, т.е. порядка* $O(N)$*. Таким образом, нами получено доказательство теоремы.*

Как видно, принципиальная схема быстрого спектрального преобразования предложена выше в качестве доказательства *Теоремы 1*. Алгоритм рассмотрен в общем виде для произвольного линейного преобразования функции $A(f)$, построен на основании коэффициентов разложения самой функции $f(x)$ и знании рекуррентных соотношений вида:

$$A(\varphi_{n+1}) = F_n\left(A(\varphi_n), \ldots, A(\varphi_{n-d}), \varphi_{n+q}, \ldots, \varphi_{n-p}\right). \qquad (2.4.12)$$

Далее в работе будут рассмотрены преимущественно базисы, связанные с полиномами Лагерра и ряд линейных операторов с тем, чтобы найти рекуррентные соотношения в явной аналитической форме применительно к каждому из случаев. Однако, в ходе диссертационной работы рекуррентные соотношения (2.4.3) были рассмотрены и получены для всех классических ортогональных полиномов по-аналогии.

Ниже подробно изложены технические приемы, предложенные для вывода рекуррентных соотношений вида (2.4.3), и представлены примеры их применения для вывода основных, широко используемых в теории и на практике преобразований функций.

2.2 Классические ортогональные полиномы

Итак, представив доказательство Теоремы 1 в общем виде, допустим некоторое ограничение класса рассматриваемых ортогональных систем. Будем рассматривать базисы классических ортогональных полиномов и конкретные операторы с тем, чтобы явно, применительно к каждому случаю найти требуемые рекуррентные соотношения в аналитической форме.

В данной главе рассмотрение будет ограничено классом всех систем ортогональных функций, построенных на полиномиальных решениях гипергеометрического уравнения:

$$z(1-z)w'' + \left(\gamma - (\alpha+\beta+1)z\right)w' - \alpha\beta w = 0,$$

где $\alpha, \beta, \gamma = const$ – некоторые параметры.

Известно явное представление аналитического решения $F(z;\alpha,\beta,\gamma)$ гипергеометрического уравнения в виде бесконечного ряда Гаусса:

$$F(z;\alpha,\beta,\gamma) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)...(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)...(\gamma+n-1)} z^n,$$

однако при определенных параметрах α, β, γ в области действительных чисел для гипергеометрического оператора $L(y;\alpha,\beta,\gamma)$:

$$L(y;\alpha,\beta,\gamma) = x(1-x)y'' + \left(\gamma - (\alpha+\beta+1)x\right)y' - \alpha\beta y$$

получим спектр собственных функций в виде системы ограниченных степенных рядов $\{P_n(x;\alpha,\beta,\gamma)\}$, удовлетворяющих условию ортогональности

на определенном интервале (a,b) и при определенной весовой функции $\rho(x;\alpha,\beta,\gamma)$:

$$\int_a^b P_n(x;\alpha,\beta,\gamma)P_m(x;\alpha,\beta,\gamma)\rho(x;\alpha,\beta,\gamma)dx = 0 \quad \Leftrightarrow n \neq m.$$

Через такие решения, называемые классическими ортогональными полиномами, можно представить ряд широко известных ортогональных систем: Якоби, Гегенбауэра, Чебышева, Лежандра, Эрмита, Лагерра, Сонина-Лагера (обобщенные функции Лагерра).

Полезно помнить, что полиномы Лежандра являются частным случаем полиномов Гегенбауэра, а последние в свою очередь – частным случаем Якоби. Тогда приходим к следующему утверждению.

Утверждение: Для представления семейства всех полиномиальных решений гипергеометрического уравнения достаточно группы полиномов: Якоби, Сонина-Лагерра и Эрмита. Любые другие полиномиальные решения гипергеометрического уравнения, окажутся либо альтернативным представлением, либо частным случаем одного из вышеуказанных (см. схему ниже).

Рис. 2.2.1

Приходим к важному заключению, что достаточно получить рекуррентное соотношение вида (?), к примеру, для системы полиномов Якоби, чтобы утверждать существование подобного рекуррентного соотношения того же преобразования $A(\,)$ для систем полиномов Гегенбауэра, Лежандра и других частных случаев.

Далее особое внимание будет уделено описанию общей схемы вывода требуемых для вычислений аналитических соотношений особого вида в случае использования определенных базисов. Соотношения будут получены для множества всех базисов классических ортогональных полиномов (схема выше) в отношении к основным, используемым на практике линейным операторам: умножение на рациональные функции, дифференцирование, интегрирование и т.д. Результатом в каждом случае должно стать множество найденных рекуррентных соотношений, как, например, соотношения таблицы 2.2.1, найденные для оператора интегрирования и каждой из систем выделенного нами класса.

Таблица 2.2.1. *Рекуррентные соотношения для оператора* $A(\varphi_n)=\int \varphi_n dx$ *:*

$\int P_n^{(\alpha,\beta)}dx = \frac{2(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)}P_{n+1}^{(\alpha,\beta)} + \frac{2(\alpha-\beta)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}P_n^{(\alpha,\beta)} -$			
$-\frac{2(n+\alpha)(n+\beta)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)(n+\alpha+\beta)}P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}$;			
$\int C_n^{\lambda}dx = \frac{C_{n+1}^{\lambda}-C_{n-1}^{\lambda}}{2(\lambda+n)}$;	$\int L_n^{\alpha}dx = -L_{n+1}^{\alpha}+L_n^{\alpha}$;	$\int L_n dx = -L_{n+1}+L_n$;	$\int H_n dx = \frac{H_{n+1}}{2(n+1)}$;
$\int T_n dx = \frac{T_{n+1}-T_{n-1}}{2n}$;	$\int U_n dx = \frac{U_{n+1}-U_{n-1}}{2(n+1)}$;	$\int P_n(x)dx = \frac{P_{n+1}(x)-P_{n-1}(x)}{2n+1}$.	

Класс рассматриваемых в данной работе ортогональных систем легко будет дополнен за счет базисов, построенных на вышеперечисленных системах. Под этим мы подразумеваем множество определенных модификаций этих систем, вызванных различными причинами, большей

частью прикладного характера. Так, например, использование нормированных полиномов:

$$\overline{P}_n(x) = \frac{P_n(x)}{\sqrt{\int_a^b P_n^2(x)\rho(x)dx}},$$

оказывается более удобным при расчетах и как показано в работах [11, 12], приводит к меньшей скорости накопления вычислительных ошибок.

Следующим примером могут стать системы с дополнительно введенным масштабным коэффициентом m [2]:

$$\widetilde{P}_n(x;\alpha,\beta,\gamma,m) = P_n(mx;\alpha,\beta,\gamma).$$

Такие представления бывают полезны для практических целей, например, при поиске оптимальных условий сжатия информации.

Однако, пожалуй, важнейшими из всех нами рассмотренных модификаций являются системы функций, построенные следующим, общим для всех, способом:

$$p_n(x;\alpha,\beta,\gamma) = \sqrt{\rho(x;\alpha,\beta,\gamma)}P_n(x;\alpha,\beta,\gamma).$$

Как и остальные, вышеперечисленные модификации полиномов, системы функций $\{p_n(x;\alpha,\beta,\gamma)\}$ сохраняют основные свойства: ортогональности и полноты в рассматриваемом пространстве. Ясно, что весовые функции в данном случае будут отсутствовать в расчетах, т.е.:

$$C_n = \int_a^b p_n(x;\alpha,\beta,\gamma)f(x)dx = 0.$$

В дальнейшем нам будет удобней различать эти функции-модификации и сами классические ортогональные полиномы. Для этого предлагается придерживаться следующей нотации, по аналогии с тем, как это сделано в работах [2, 4]:

Будем обозначать полиномы прописными буквами, а соответствующие им функции – строчными. Например, функции Лагерра как $l_n(x)$, в отличие от полиномов: $L_n(x)$.

Интересно, что полиномы и определенные таким образом функции Лежандра совпадают в силу равенства единице соответствующей весовой функции. Таким образом, мы не будем рассматривать функции Лежандра, что оказывается весьма кстати ввиду существования отличного от данного определения функции Лежандра, как решения одного, в общем виде, не гипергеометрического уравнения [10]:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left(\nu(\nu+1) - \frac{\mu^2}{1-x^2}\right)y = 0,$$

где $\nu, \mu = const$ – произвольные числа.

Далее подробно изложены технические приемы, предложенные для вывода рекуррентных соотношений вида (?) и представлены примеры их применения для вывода основных, широко используемых в теории и на практике преобразований функций. Основные рекуррентные соотношения, найденные в ходе выполнения диссертационной работы, представлены в приложениях 1, 2.

Для некоторых преобразований технические приемы, применяемые при нахождении соотношений вида (?), будут идентичны для систем ортогональных полиномов и для систем функций. Это будет показано в параграфе 2.7. В том же параграфе рассмотрены случаи, когда точных аналогий с полиномами при выводе аналитических соотношений вида (?) провести не удается.

2.3 Быстрые преобразования для оператора вида $A(f) = xf(x)$. Лемма о суперпозиции линейных операторов

Для начала приведем вид рекуррентных соотношений, хорошо известных широкому кругу исследователей, отталкиваясь от которых автору удалось получить впоследствии требуемые новые рекуррентные соотношения вида

(?). Известно [13], что для каждой системы ортогональных полиномов (вообще, не только классического типа) имеют место соотношения вида

$$xP_n(x) = \alpha_n P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x). \qquad (2.3.1)$$

Теоретическая и практическая ценность классических ортогональных полиномов во многом объясняется тем, что требуемые значения коэффициентов $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ легко могут быть выражены в явном виде, например, для полиномов Сонина-Лагерра имеем:

$$xL_n^\alpha(x) = -(n+1)L_{n+1}^\alpha(x) + (2n+\alpha+1)L_n^\alpha(x) - (n+\alpha)L_{n-1}^\alpha(x).$$

На практике такие формулы обычно используются для быстрого расчета значений полиномов старших степеней при знании значений первых. Так, очевидно, при знании значений первых полиномов $L_0^\alpha(x)$ и $L_1^\alpha(x)$, легко найти значения старших, последовательно проводя вычисления по преобразованной формуле:

$$L_{n+1}^\alpha(x) = \frac{x-(2n+\alpha+1)}{n+1} L_n^\alpha(x) + \frac{n+\alpha}{n+1} L_{n-1}^\alpha(x).$$

Очевидно, что (2.3.1) уже само по себе является рекуррентным соотношением вида (?), которое соответствует линейному оператору $A(f) = xf(x)$. Таким образом, согласно доказательству <u>Теоремы 1</u>, при знании значений $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ мы можем вычислить спектральные коэффициенты преобразования функции $A(f) = xf(x)$ из спектра функции $f(x)$ за линейное время. Продемонстрируем это на простом примере.

Пример 1: Пусть функция $f(x) = 1 + x$ представлена ортогональным рядом

$$f(x) = 1 + x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = 2L_0(x) + L_1(x)$$

по полиномам Лагерра:

$$\begin{aligned} L_0(x) &\equiv 1 &&= 1 \\ L_1(x) &= xL_0 + L_0 &&= 1 - x \\ L_2(x) &= \frac{3-x}{2}L_1 - \frac{1}{2}L_0 &&= \frac{x^2}{2} - 2x + 1 \end{aligned},$$

полученных из формул вида:

$$xL_0 = -L_1 + L_0$$
$$xL_1 = -2L_2 + 3L_1 - L_0.$$

То есть спектр $f(x)$ состоит из двух ненулевых значений:

$$\{C_0 = 2; C_1 = 1\}.$$

Пусть далее требуется вычислить спектр преобразования функции

$$A(f) = xf(x).$$

Сделаем это, используя последние рекуррентные соотношения:

$$A(f) = xf(x) = 2xL_0 + xL_1 = -2L_1 + 2L_0 - 2L_2 + 3L_1 - L_0 = -2L_2 + L_1 + L_0.$$

Таким образом, получим спектральное представление функции $A(f)$:

$$\{C_0 = 1; C_1 = 1; C_2 = -2\}.$$

Доказав реализуемость быстрого алгоритма внутриспектрального вычисления для преобразования $A(f) = xf(x)$ можно утверждать, что для преобразования $\widetilde{A}(f) = x^2 f(x)$ быстрый алгоритм также существует.

Лемма *(о суперпозиции линейных операторов)*: Если для осуществления внутриспектральных преобразований функций, соответствующих линейным операторам $F(f)$ и $G(f)$, существуют алгоритмы линейной временной сложности, то для осуществления преобразований спектра, соответствующих линейному оператору $A(f) = F(G(f))$, также существует алгоритм линейной временной сложности.

<u>Доказательство:</u> Действительно, ввиду того, что $\widetilde{A}(f) = A(A(f))$, т.к. каждый из спектров функций $\overline{f}(x) = A(f)$ и $\overline{\overline{f}}(x) = A(\overline{f})$ вычисляется за линейное время $O(N)$ (где N – длина спектра) приходим к необходимости последовательного их выполнения, что в сумме имеет также временную сложность $O(N)$. Обобщая сказанное, приходим к очевидному выводу, что

перемножение функций с произвольным полиномом можно легко выполнить в спектральном виде за линейное время, если степень полинома не зависит от длины спектра N. Лемма доказана.

2.4 Быстрые преобразования для операторов вида $A(f) = f(x)/x$. Теорема обратимости линейных операторов

Далее попытаемся найти рекуррентное соотношение для оператора, обратного к рассмотренному:

$$A^{-1}(f) = \frac{f(x)}{x}. \qquad (2.6.1)$$

Сразу же оговоримся, что согласно *Теореме 1*, должно соблюдаться обязательное условие:

$$A^{-1}(f) \in L^2_\rho(a,b). \qquad (2.6.2)$$

Это условие всегда выполнимо, если функция $f(x) \in L^2_\rho(a,b)$ представима как результат действия оператора $A(\,)$ на некоторую функцию $g(x) \in L^2_\rho(a,b)$, т.е.

$$f(x) = A(g) = xg(x). \qquad (2.6.3)$$

Возникает принципиальный вопрос о возможности осуществления обратного оператора в спектральном представлении функций и об условиях быстрой его реализации. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 2 *(об обратимости линейных операторов)*: *Пусть* $\{\varphi_n(x)\}$ – *некоторая система ортогональных функций пространства* $L^2_\rho(a,b)$ *и* $A(\,)$ – *некоторый линейный оператор, определяющий преобразование:*

$A: L^2_\rho(a,b) \to L^2_\rho(a,b)$. *Пусть далее* $A^{-1}(\,)$ *– обратный оператор. Тогда, если для каждого* $\varphi_{n+1}(x)$ *существует рекуррентное соотношение вида*

$$A(\varphi_{n+1}) = F_n\big(A(\varphi_n),\ldots,A(\varphi_{n-d}),\varphi_{n+q},\ldots,\varphi_{n-p}\big), \tag{2.6.4}$$

и для всякого $\varphi_n(x)$

$$A^{-1}\big(A(\varphi_n)\big) \in L^2_\rho(a,b), \tag{2.6.5}$$

то для оператора $A^{-1}(\,)$ *также существуют рекуррентные соотношения вида*

$$A^{-1}(\varphi_{n+1}) = \overline{F_n}\big(A^{-1}(\varphi_n),\ldots,A^{-1}(\varphi_{n-p-q+1}),\varphi_{n-q+2},\ldots,\varphi_{n-d-q+1}\big), \tag{2.6.6}$$

где $F_n(\ldots), \overline{F_n}(\ldots)$ *– линейные формы,* $d,q,p = const \in \mathbf{N}$.

<u>Доказательство:</u> Действительно, если подействовать оператором $A^{-1}(\,)$ на обе половины соотношения вида (2.4.3)

$$A^{-1}\big(A(\varphi_{n+1})\big) = F_n\big(A^{-1}\big(A(\varphi_n)\big),\ldots,A^{-1}\big(A(\varphi_{n-d})\big),A^{-1}(\varphi_{n+q}),\ldots,A^{-1}(\varphi_{n-p})\big), \tag{2.6.7}$$

то ввиду условия теоремы приходим к равенству

$$\varphi_{n+1} = F_n\big(A^{-1}(\varphi_{n+q}),\ldots,A^{-1}(\varphi_{n-p}),\varphi_n,\ldots,\varphi_{n-d}\big). \tag{2.6.8}$$

Преобразовав последнее, получим

$$A^{-1}(\varphi_{n+q}) = \overline{F}_{n+q-1}\big(A^{-1}(\varphi_{n+q-1}),\ldots,A^{-1}(\varphi_{n-p}),\varphi_{n+1},\varphi_n,\ldots,\varphi_{n-d}\big), \tag{2.6.9}$$

где $\overline{F}_{n+q-1}(\ldots)$ – линейная форма, определяемая коэффициентами формы $F_n(\ldots)$ и совпадающая с искомой формой в точности до порядка. Таким образом, нами получено доказательство теоремы.

Согласно *Теореме 2* получим из (2.3.1) в общем виде рекуррентное соотношение для преобразования $A(f) = f(x)/x$ для полиномов Лагерра:

$$\frac{L_{n+1}(x)}{x} = -\frac{1}{n+1}L_n(x) + \frac{2n+1}{n+1}\frac{L_n(x)}{x} - \frac{n}{n+1}\frac{L_{n-1}(x)}{x}. \tag{2.6.10}$$

Важным дополнением к *Теореме 2*, на которое хотелось бы обратить внимание, является то, что условия (2.6.5) действительно оказывается

достаточным и, вообще говоря, даже не требуется соблюдения для каждого $\varphi_n(x)$ более сильного условия:

$$A^{-1}(\varphi_n) \in L^2_\rho(a,b)\,. \qquad (2.6.11)$$

Более того, предполагается, что могут быть такие $\varphi_k(x)$, для которых обратное преобразование не принадлежит рассматриваемому пространству:

$$A^{-1}(\varphi_k) \notin L^2_\rho(a,b)\,, \qquad (2.6.12)$$

но если условие (2.6.5) соблюдено, то при вычислениях обязательно происходит взаимное уничтожение соответствующих им спектральных коэффициентов. Продемонстрируем это на простом примере:

Пример 2. Пусть функция $f(x) = 1 + x$ представлена ортогональным рядом по полиномам Лагерра

$$f(x) = 2L_0 + L_1\,, \qquad (2.6.13)$$

а функция $g(x) = x + x^2$ является преобразованием функции $f(x)$ для линейного оператора $A(f) = xf(x)$ и также представлена соответственно рядом:

$$g(x) = A(f) = -2L_2 + L_1 + L_0\,. \qquad (2.6.14)$$

Таким образом, спектр функции $f(x)$ состоит из значений $\{C_0 = 2; C_1 = 1\}$, а спектр функции $g(x)$ из значений $\{C_0 = 1; C_1 = 1; C_2 = -2\}$. Далее следует вычислить спектральное представление обратного преобразования $A^{-1}(g(x))$, которое, очевидно, должно совпадать со спектром функции $f(x)$, т.к. согласно условию *Теоремы 2*: $f = A^{-1}(A(f))$. Для осуществления вычислений потребуются рекуррентные соотношения (2.6.10), соответствующие обратному оператору $A^{-1}(\,)$:

$$\begin{aligned} &\frac{L_0}{x} \notin L^2_\rho(a,b), \\ &\frac{L_1}{x} = -L_0 + \frac{L_0}{x}, \\ &\frac{L_2}{x} = -\frac{L_1}{2} + \frac{3}{2}\frac{L_1}{x} - \frac{1}{2}\frac{L_0}{x}. \end{aligned} \qquad (2.6.15)$$

Подставив рекурсивно сначала последнее

$$A^{-1}(g)=\frac{1}{x}\left(-2L_2+L_1+L_0\right)=L_1-3\left(\frac{L_1}{x}\right)+\left(\frac{L_0}{x}\right)+\left(\frac{L_1}{x}\right)+\left(\frac{L_0}{x}\right)=L_1-2\frac{L_1}{x}+2\left(\frac{L_0}{x}\right), \quad (2.6.16)$$

а затем предпоследнее из полученных рекуррентных соотношений

$$A^{-1}(g)=L_1-2\left(\frac{L_1}{x}\right)+2\left(\frac{L_0}{x}\right)=L_1+2L_0-2\left(\frac{L_0}{x}\right)+2\left(\frac{L_0}{x}\right)=L_1+2L_0, \quad (2.6.17)$$

видим, что полученное через рекуррентные соотношения конечное выражение обратного преобразования $A^{-1}(g)$ действительно в точности совпадает со спектральным представлением функции $f(x)$.

Вообще, члены промежуточных выражений, не удовлетворяющие условию (2.6.11), наподобие членов (L_1/x) и (L_0/x), можно считать своеобразными “мнимыми” элементами ортогональной системы функций, которые участвуют в вычислениях, но в конечном выражении, очевидно, должны отсутствовать.

Все вышесказанное относительно полиномов Лагерра обобщается по аналогии до полиномов Сонина-Лагерра, Якоби, Эрмита и других систем классических ортогональных полиномов. Можно утверждать, что при соблюдении вышеизложенных условий и прочих естественных условиях существует возможность спектрального перемножения рассматриваемых на практике спектров функций с заданными полиномами или даже с произвольно заданными рациональными функциями за линейное время.

2.5 Быстрые преобразования для оператора дифференцирования

Следующим рассмотренным нами преобразованием, имеющим большое значение в теории и на практике, станет оператор дифференцирования:

$$A(f)=\frac{df(x)}{dx}. \quad (2.5.1)$$

При выводе рекуррентных соотношений (?) для данного линейного оператора знакомых нам соотношений вида (2.3.1) окажется недостаточно и потребуется применить следующие три:

$$dP_n^{(\alpha,\beta)}/dx = \frac{1}{2}(n+\alpha+\beta+1)P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)} \tag{2.5.2}$$

$$dL_n^{\alpha}/dx = -L_{n-1}^{\alpha+1} \tag{2.5.3}$$

$$dH_n/dx = 2nH_{n-1} \tag{2.5.4}$$

известные ранее [13, стр. 17] для полиномов Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}$, Сонина-Лагерра L_n^{α} и Эрмита H_n.

Обратим внимание на то, что для полиномов Эрмита уравнение (2.5.3) само по себе уже является рекуррентным соотношением вида (?). На первый взгляд это имеет место и для (2.5.2) и (2.5.3), однако заметим, что на самом деле это не так – полиномы Якоби и Сонина-Лагерра (обобщенного Лагерра) имеют параметры и при изменении этих параметров мы получаем элементы из другой ортогональной системы, хотя бы и из того же семейства. Как можно справиться с этой трудностью мы покажем на примере полиномов Сонина-Лагерра, но представленный ниже прием применим и к полиномам Якоби, Гегенбауэра и другим системам классических ортогональных полиномов с параметрами.

Итак, раскроем выражение $\left(xL_n^{\alpha}\right)'$ и затем, воспользовавшись (2.5.1, 2.5.3), получим:

$$\left(xL_n^{\alpha}\right)' = L_n^{\alpha} + x\left(L_n^{\alpha}\right)' = L_n^{\alpha} - xL_{n-1}^{\alpha+1} = L_n^{\alpha} + nL_n^{\alpha+1} - (2n+\alpha)L_{n-1}^{\alpha+1} + (n+\alpha)L_{n-2}^{\alpha+1}. \tag{2.5.5}$$

Но теперь, как видно, можно вновь воспользоваться (2.5.3) и вернуть отдельные члены выражения (те, что элементы из системы $\left\{L_n^{\alpha+1}\right\}$) обратно в систему $\left\{L_n^{\alpha}\right\}$:

$$\begin{aligned}\left(xL_n^{\alpha}\right)' &= L_n^{\alpha} + nL_n^{\alpha+1} - (2n+\alpha)L_{n-1}^{\alpha+1} + (n+\alpha)L_{n-2}^{\alpha+1} = \\ &= L_n^{\alpha} - n\left(L_{n+1}^{\alpha}\right)' + (2n+\alpha)\left(L_n^{\alpha}\right)' - (n+\alpha)\left(L_{n-1}^{\alpha}\right)'.\end{aligned} \tag{2.5.6}$$

Раскроем выражение $\left(xL_n^\alpha\right)'$ иначе, сначала воспользовавшись (2.5.1), но лишь потом раскрыв внешние скобки, и тогда получим:

$$\left(xL_n^\alpha\right)' = -(n+1)\left(L_{n+1}^\alpha\right)' + (2n+\alpha+1)\left(L_n^\alpha\right)' - (n+\alpha)\left(L_{n-1}^\alpha\right)'. \qquad (2.5.7)$$

Очевидно, что мы вправе далее приравнять оба полученных выражения и получить, после приведения слагаемых, искомое рекуррентное соотношение для оператора дифференцирования и системы ортогональных полиномов Сонина-Лагерра в весьма элегантном виде:

$$\left(L_{n+1}^\alpha\right)' = \left(L_n^\alpha\right)' - L_n^\alpha. \qquad (2.5.8)$$

Вообще, соотношение (2.5.8) также можно было найти, воспользовавшись, например, следующей формулой:

$$x\left(L_n^\alpha\right)' = nL_n^\alpha - (n+\alpha)L_{n-1}^\alpha. \qquad (2.5.9)$$

приведенной, например, в [14, стр. 237].

Однако указанный выше способ интересен тем, что позволяет, как было сказано выше, по аналогии получить соотношения, подобные (2.5.8), и для других систем классических ортогональных полиномов, например, даже для системы полиномов Якоби.

2.6 Быстрые преобразования для оператора интегрирования

Воспользовавшись Теоремой 2, легко найдем также рекуррентное соотношение для обратного оператора – интегрирования функций (в смысле нахождения первообразной функции):

$$\int L_n^\alpha dx = -L_{n+1}^\alpha + L_n^\alpha. \qquad (2.6.1)$$

Заметим, что нахождение первообразной для функции $f(x)$ в данной работе будет пониматься в смысле интеграла с переменным верхним пределом следующего вида:

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx. \qquad (2.6.2)$$

Как говорилось выше, все представленные приемы по аналогии применимы также к системам полиномов Якоби, а значит и ко всем его важным частным случаям: полиномам Чебышева, Лежандра, Гегенбауэра и т.д.

2.7 Нахождение рекуррентных соотношений для различных модификаций ортогональных базисов

В заключении, прежде чем завершить данную главу, хотелось бы остановиться на модификациях рассмотренных выше базисов – ортогональных системах, полученных на основе классических ортогональных полиномов. Вообще, довольно часто рекуррентные соотношения, известные для систем полиномов, легко удается преобразовать применительно к их модификациям. Покажем это на следующем примере:

Пример 3. В некоторых областях теории информации поиск оптимального представления некоторых затухающих сигналов предложено [2] осуществлять в следующем виде:

$$f(x) = e^{-mx}\left(C_0 L_0^{\alpha}(x) + C_1 L_1^{\alpha}(x) + \ldots + C_N L_N^{\alpha}(x)\right), \qquad (2.7.1)$$

где m – масштабный коэффициент, успешный выбор которого на практике может позволить значительно сократить длину спектрального представления. В ходе исследований также часто требуется быстро

вычислять интегралы от функций, заданных в подобном спектральном виде.

Нам известно, чтобы произвести в спектре вычисления, соответствующие преобразованию самой функции, следует получить для него рекуррентное соотношение вида (2.4.3). Тогда, воспользовавшись (2.6.1), легко получим требуемое рекуррентное соотношение для представления (2.*7.1):

$$\int e^{-mx} L_{n+1}^{\alpha} dx = e^{-mx}\left(\frac{1}{m} L_{n+1}^{\alpha} + \frac{1}{m} L_{n}^{\alpha}\right) + \int e^{-mx} L_{n}^{\alpha} dx - \frac{1}{m}\int e^{-mx} L_{n-1}^{\alpha} dx . \qquad (2.7.2)$$

Для многих преобразований рекуррентные соотношения (2.4.3) вовсе не претерпевают никаких качественных изменений при переходе к ортогональным функциям. Например, для оператора $A(f) = xf(x)$.

Однако задача отыскания аналитических соотношений вида (2.4.3) в случае замены системы ортогональных полиномов на соответствующую систему ортогональных функций часто требует дополнительных знаний из области математического анализа и дифференциальных уравнений.

Приведем в качестве примера вывод рекуррентного соотношения для оператора дифференцирования и системы ортогональных <u>функций</u> Сонина-Лагерра:

$$\left\{l_n^{\alpha}(x)\right\} \equiv \left\{\sqrt{x^{\alpha} e^{-x}}\, L_n^{\alpha}(x)\right\}. \qquad (2.7.3)$$

Прежде перепишем гипергеометрическое уравнение в более удобном для дальнейших расчетов виде:

$$\sigma(x) y'' + \tau(x) y' + \lambda y = 0,$$

где $\sigma(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \quad \tau(x) = b_0 + b_1 x$,

$a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, \lambda$ – числа, определенные параметрами α, β, γ.

Обозначим через $\{p_n(x)\}$ – в общем виде систему ортогональных функций, полученных из системы ортогональных полиномов $\{P_n(x)\}$. Тогда, представим:

$$\begin{aligned}\left(p_n(x)\right)' = \left(\sqrt{\rho(x)}P_n(x)\right)' = \frac{\rho'(x)}{2\sqrt{\rho(x)}}P_n(x) + \sqrt{\rho(x)}P_n'(x) = \\ = \sqrt{\rho(x)}\left(\frac{1}{2}\frac{\rho'(x)}{\rho(x)}P_n(x) + P_n'(x)\right)\end{aligned} \tag{2.7.3}$$

Согласно [13], известно, что весовая функция является решением уравнения

$$\frac{\rho'(x)}{\rho(x)} = \frac{\tau(x) - \sigma'(x)}{\sigma(x)}. \tag{2.7.4}$$

Ввиду того, что $\sigma(x), \tau(x)$ – полиномы второй и первой степени соответственно, очевидно, что (2.*7.4) является уравнением Пирсона [10]. Однако интересно, что явного выражения решения (2.*7.4) при получении требуемого рекуррентного соотношения вида (2.4.3) для системы $\{p_n(x)\}$ и оператора дифференцирования нам не потребуется. Также не потребуется проделывать в выражении (2.*7.3) замену (2.*7.4).

Оказывается проще получить требуемое соотношение из следующего равенства:

$$\left(\sigma(x)p_n(x)\right)' = \sqrt{\rho(x)}\left(\frac{\tau(x) + \sigma'(x)}{2}P_n(x) + \sigma(x)P_n'(x)\right). \tag{2.7.5}$$

Покажем, каким образом это можно сделать. Дальнейшее изложение приема уже будем строить на примере систем ортогональных функций Сонина-Лагерра.

Итак, для системы ортогональных функций Сонина-Лагерра гипергеометрическое уравнение принимает следующий вид:

$$xy'' + (1 + \alpha - x)y' + ny = 0, \tag{2.7.6}$$

а весовая функция соответственно равна

$$\rho(x) = x^{\alpha} e^{-x}. \tag{2.7.7}$$

Тогда, согласно (2.*7.5) для произвольной функции Сонина-Лагерра получим

$$\left(x l_n^{\alpha}(x)\right)' = \sqrt{\rho(x)}\left(\frac{2+\alpha-x}{2} L_n^{\alpha}(x) + x\left(L_n^{\alpha}(x)\right)'\right). \tag{2.7.8}$$

Очевидно, что равенство также справедливо для функции старшего порядка:

$$\left(x l_{n+1}^{\alpha}(x)\right)' = \sqrt{\rho(x)}\left(\frac{2+\alpha-x}{2} L_{n+1}^{\alpha}(x) + x\left(L_{n+1}^{\alpha}(x)\right)'\right). \tag{2.7.9}$$

Вычтем из первого равенства второе и, преобразовав получившееся равенство с помощью рекуррентного соотношения (2.7.6), получим:

$$\left(x l_n^{\alpha}\right)' - \left(x l_{n+1}^{\alpha}\right)' = \frac{2+\alpha-x}{2}\left(l_n^{\alpha} - l_{n+1}^{\alpha}\right) + x l_n^{\alpha}. \tag{2.7.10}$$

Применив соотношение (2.5.1) и выполнив приведение подобных, получим:

$$\begin{aligned}(n+2)\left(l_{n+2}^{\alpha}\right)' - (3n+\alpha+4)\left(l_{n+1}^{\alpha}\right)' + (3n+2\alpha+2)\left(l_n^{\alpha}\right)' - (n+\alpha)\left(l_{n-1}^{\alpha}\right)' = \\ = \frac{n+2}{2} l_{n+2}^{\alpha} + \frac{n}{2} l_{n+1}^{\alpha} + \frac{n+\alpha+2}{2} l_n^{\alpha} - \frac{n+\alpha}{2} l_{n-1}^{\alpha},\end{aligned} \tag{2.7.11}$$

откуда легко выведем искомое рекуррентное соотношение в виде:

$$\begin{aligned}\left(l_{n+1}^{\alpha}\right)' = \left(3 + \frac{\alpha-2}{n+1}\right)\left(l_n^{\alpha}\right)' - \left(3 + 2\frac{\alpha-2}{n+1}\right)\left(l_{n-1}^{\alpha}\right)' + \left(1 + \frac{\alpha-2}{n+1}\right)\left(l_{n-2}^{\alpha}\right)' - \\ - \frac{l_{n+1}^{\alpha}}{2} + \frac{n-1}{n+1}\frac{l_n^{\alpha}}{2} + \left(1 + \frac{\alpha}{n+1}\right)\frac{l_{n-1}^{\alpha}}{2} - \left(\frac{n-1}{n+1} + \frac{\alpha}{n+1}\right)\frac{l_{n-2}^{\alpha}}{2}.\end{aligned} \tag{2.7.12}$$

Так же, как и ранее, изложенный прием применим к остальным системам классическим ортогональным функциям по аналогии. На этом изложение основных приемов вычислений рекуррентных соотношений вида (?) для систем классических ортогональных полиномов и функций непрерывного аргумента закончено. Однако данные приемы позволяют получить

множество более сложных аналитически описанных преобразований. Для ряда основных, широко используемых на практике преобразований получены рекуррентные соотношения, собранные в табличной форме в *Приложениях 1,2*.

Глава III
Общая вычислительная схема для реализации быстрых спектральных преобразований

3.1 Определение спектрального каскада и диффузии

Ранее в работе было доказано существование алгоритмов быстрого спектрального преобразования для рассмотренного класса преобразований функций и предложена принципиальная схема вычислений. Однако для практического применения было бы удобнее использовать иную схему расчетов, разделив вычислительный процесс на две отдельные стадии:

1) каскад коэффициентов разложения;
2) диффузия коэффициентов разложения.

Прежде перепишем (2.4.3) в следующем виде:

$$A(\varphi_{n+1}) = \sum_{k=0}^{d} \nabla_k(n) A(\varphi_{n-k}) + \sum_{k=-p}^{q} \Delta_k(n) \varphi_{n+k} \ . \qquad (3.1.1)$$

Теперь пусть функция $f(x)$ задана в виде ортогонального ряда

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N-1} C_n \varphi_n(x) \qquad (3.1.2)$$

и требуется найти функцию

$$g(x) = A(f), \qquad (3.1.3)$$

заданную по той же системе ортогональных функций в виде ряда:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{N-1} D_n \varphi_n(x) \ . \qquad (3.1.4)$$

Будем далее считать, что значения коэффициентов разложения заданы в табличном виде как две строки:

$$\begin{aligned} \{C_n\} &= [C_0, \quad C_1, \quad \ldots \quad , C_N] \\ \{D_n\} &= [D_0, \quad D_1, \quad \ldots \quad , D_N, \ldots, D_{N+q}]. \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

Определение 1: Группу изменений $\nabla(C_{n+1})$ табличного представления $\{C_n\}$:

$$\nabla(C_{n+1}) \equiv \begin{cases} C_n & := \quad C_n + \nabla_0(n) C_{n+1}; \\ C_{n-1} & := \quad C_{n-1} + \nabla_1(n) C_{n+1}; \\ & \quad \vdots \\ C_{n-d} & := \quad C_{n-d} + \nabla_d(n) C_{n+1}, \end{cases} \tag{3.1.6}$$

будем называть *каскадом (n+1)-го коэффициента разложения*,

а группу изменений $\Delta(C_{n+1})$ табличного представления $\{D_n\}$:

$$\Delta(C_{n+1}) \equiv \begin{cases} D_{n-p} & := \quad D_{n-p} \quad + \Delta_{-p}(n) C_{n+1}; \\ D_{n-p+1} & := \quad D_{n-p+1} \quad + \Delta_{-p+1}(n) C_{n+1}; \\ & \\ D_{n+q} & := \quad D_{n+q} \quad + \Delta_q(n) C_{n+1}. \end{cases} \tag{3.1.7}$$

будем называть *диффузией (n+1)-го коэффициента разложения*.

Изобразим на рисунках 3.1.1 и 3.1.2 схематически соответственно каскад и диффузию одного коэффициента разложения.

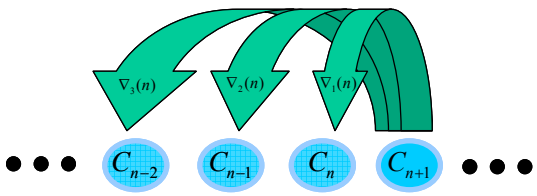


Рис. 3.1.1. Каскад (*n+1*)-го коэффициента разложения.

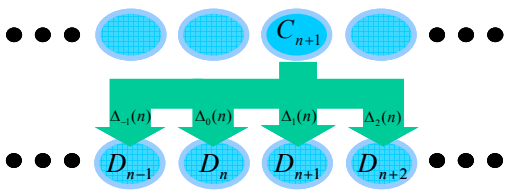


Рис. 3.1.2. Диффузия (*n+1*)-го коэффициента разложения

Определение 2: Группу последовательных изменений $\nabla(\{C_n\})$ табличного представления $\{C_n\}$:

$$\nabla(\{C_n\}) \equiv \nabla(C_N), \nabla(C_{N-1}), \ \ldots \ , \nabla(C_1), \tag{3.1.8}$$

выполненных строго в убывающем порядке, назовем *спектральным каскадом* или *каскадом коэффициентов разложения*, а группу изменений $\Delta(\{C_n\})$ табличного представления $\{D_n\}$:

$$\Delta(\{C_n\}) \equiv \Delta(C_N), \Delta(C_{N-1}), \ \ldots \ , \Delta(C_1) \tag{3.1.9}$$

выполненных в произвольном порядке, назовем *спектральной диффузией* или *диффузией коэффициентов разложения*.

Изобразим на Рисунке 3.1.3 схематически спектральный каскад, а на Рисунке 3.1.4 также схематически изобразим спектральную диффузию.

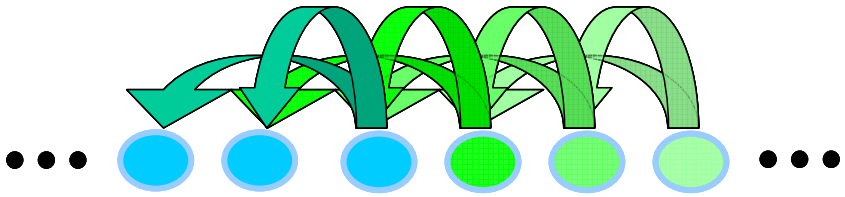


Рис. 3.1.3. Спектральный каскад.

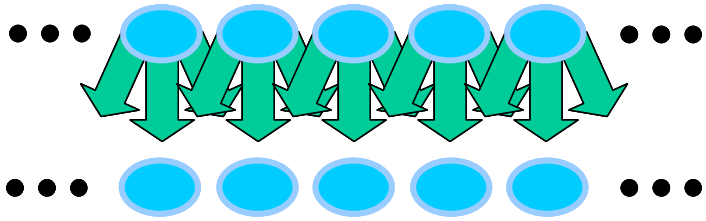


Рис. 3.1.4. Спектральная диффузия.

3.2 Метод спектрального каскада и диффузии

Утверждение 1: Если $\{D_n\}$ – массив нулевых значений, а $\{C_n\}$ – табличное представление разложения (3.1.2), то после последовательного применения спектрального каскада $\nabla(\{C_n\})$ и спектральной диффузии $\Delta(\{C_n\})$,

основанных на рекуррентном соотношении (3.1.1), в массиве $\{D_n\}$ будут содержаться коэффициенты разложения функции (3.1.4), соответствующей преобразованию (3.1.3).

Действительно, представим оператор линейного преобразования $A(\,)$ в виде суперпозиции двух линейных операторов:

$$A(\,) = A_{\Delta}\left(A_{\nabla}(\,)\right), \tag{3.2.1}$$

для которых рекуррентные соотношения определенны в виде:

$$A_{\nabla}(\varphi_{n+1}) = \sum_{k=0}^{d} \nabla_k(n) A_{\nabla}\left(\varphi_{n-k}\right), \tag{3.2.2}$$

$$A_{\Delta}(\varphi_{n+1}) = \sum_{k=-p}^{q} \Delta_k(n) \varphi_{n+k}\ . \tag{3.2.3}$$

Тогда очевидно, что оператор $A_{\nabla}(\,)$ соответствует спектральному каскаду, а оператор $A_{\Delta}(\,)$ – спектральной диффузии и их последовательное выполнение соответствует суперпозиции преобразований (3.2.1), т.е. преобразованию $A(\,)$.

Проанализировав представленные выше схемы, приходим к выводу, что на этапе спектрального каскада каждый старший коэффициент может по цепочке оказывать влияние на младшие, причем, чем выше находится коэффициент, тем, возможно, больше влияние его значения, нарастающее лавинообразно к началу таблицы, подобно снежному кому. Наблюдаемое поведение спектральных коэффициентов дает объяснение тому, почему после даже незначительного изменения одного из старших коэффициентов разложения для некоторых преобразований функций наблюдается значительное изменение результатов. Более того, представленный механизм дает возможность оценки отклонений результатов и, соответственно, устойчивости каждого из применяемых преобразований.

Также очевидно, что для линейных преобразований, вызывающих лишь диффузию коэффициентов спектрального представления, влияние каждого из коэффициентов на коэффициенты конечной формы ограничивается

исключительно окрестностью из $(q+p+1)$ его ближайших соседей. Такие преобразования нам уже знакомы, например, умножение спектрального представления на аргумент (2.3.1) или интегрирование ряда ортогональных полиномов Лагерра (2.6.1).

Предложенная система правил для осуществления на практике быстрых аналитических преобразований на основе метода каскада и диффузии названа *алгеброй спектральных преобразований*.

3.3 Пример применения метода каскада-диффузии

На Утверждении 1 и приведенных выше вычислительных схемах спектральных каскада и диффузии построен вычислительный подход для проведения внутриспектральных преобразований функций, называемый далее *методом спектральных каскада и диффузии*. Приведем пример применения метода спектрального каскада и диффузии для одного частного случая:

Пример 4. Пусть функция $f(x)$ представлена рядом ортогональных полиномов Лагерра:

$$f(x) = 10L_0(x) - 5L_1(x) - 8L_2(x) + 6L_3(x) \tag{3.3.1}$$

и требуется найти подобное же представление для результата применения оператора дифференцирования:

$$f'(x) = C_0^* L_0(x) + C_1^* L_1(x) + C_2^* L_2(x) + C_3^* L_3(x), \tag{3.3.2}$$

если для полиномов Лагерра и оператора дифференцирования известно рекуррентное соотношение вида

$$L'_{n+1}(x) = L'_n(x) - L_n(x). \tag{3.3.3}$$

Соотношение (3.3.2) приводит к двум фазам вычисления (рис. 3.3.1), где начальные табличные данные $\{C_n\}$ содержат значения

$$\{C_n\} = [\,10, -5, -8, \quad 6\,], \tag{3.3.4}$$

через $\{C'_n\}$ *– обозначены промежуточные значения, полученные в строке* $\{C_n\}$ *после проведения спектрального каскада, и* $\{C^*_n\}$ *– новая строка, в которой ожидаются новые коэффициенты представления (3.3.1).*

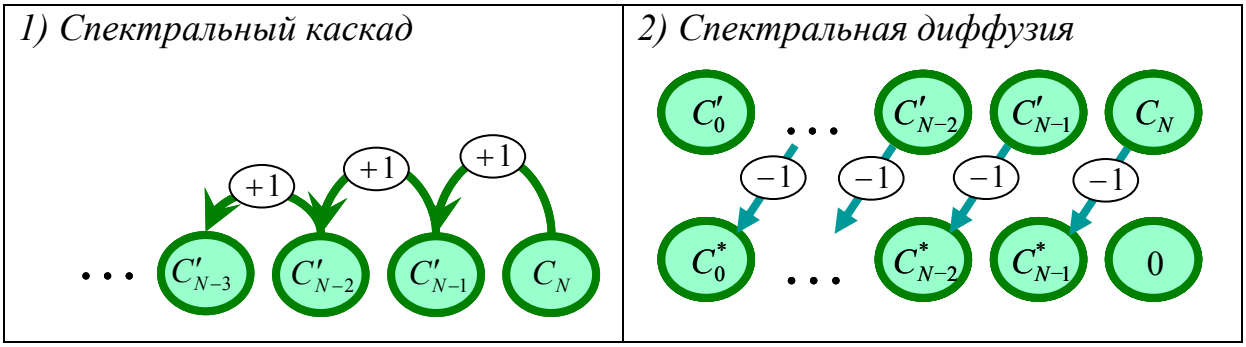


Рис. 3.3.1. Преобразования спектра, соответствующие рекуррентному соотношению (3.3.3).

Согласно построенным схемам вычисления нам надо всего лишь на этапе каскада добавить значение старшего коэффициента в соседний младший, начиная с самого старшего, а затем, на этапе диффузии, просто сдвинуть все значения на одну ячейку к началу строки, при этом изменив знак каждого из значений на обратный. Так и поступим, и после первой фазы вычислений получим промежуточные значения:

$$\{C'_n\} = [\,3, -7, -2, \quad 6\,], \tag{3.3.8}$$

а после второй фазы получим искомые значения в виде

$$\{C^*_n\} = [\,7, 2, -6, \quad 0\,], \tag{3.3.9}$$

т.е.

$$f'(x) = 7L_0(x) + 2L_1(x) - 6L_2(x). \tag{3.3.10}$$

Если вспомнить, что

$$L_0 = 1; \quad L_1 = 1 - x; \quad L_2 = 1 - 2x + \frac{x^2}{2}; \quad L_3 = 1 - 3x + \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{6}, \tag{3.3.11}$$

то полученный результат несложно проверить.

Действительно:

$$\begin{aligned} f(x) = \quad & 10L_0(x) - 5L_1(x) - 8L_2(x) + 6L_3(x) \quad = \quad 3 + 3x + 5x^2 - x^3; \\ f'(x) = \quad & 7L_0(x) + 2L_1(x) - 6L_2(x) \quad = \quad 3 + 10x - 3x^2. \end{aligned} \qquad (3.3.12)$$

Интересно, что при переходе от системы полиномов Лагерра к системе обобщенных полиномов Лагерра рекуррентное соотношение (3.3.2) остается неизменным, согласно (2.7.6), т.е. рекуррентное соотношение, а значит и весь вычислительный процесс, построенный по методу спектральных каскада и диффузии, никак не зависит от величины α – определяющего параметра ортогональной системы!

Отсюда приходим к весьма интересному заключению: если нами построен некоторый электронный аппарат для вычисления производных функций, представленных через полиномы Лагерра, то можно использовать данный аппарат без изменений структуры и параметров вычислителя, для отыскания производных функций, представленных через любую другую систему обобщенных полиномов Лагерра. Изложение основ метода спектральных каскада и диффузии на этом будем считать законченным. Далее представим обобщение метода на класс вычислительных машин с параллельной архитектурой исполнения команд.

3.4 Сравнительный анализ результатов расчетов и основных характеристик алгоритмов.

Разберемся в чем же принципиальное отличие метода представленного выше от всех ранее проводимых попыток разрешения задачи быстрого внутриспектрального преобразования функций. Отличие представляется в виде замены одного сильного условия, другим, более слабым условием.

Первое, повсеместно используемое условие сводилось к требованию о представлении линейного преобразования одного отдельного элемента системы $A(\varphi_n)$ через все непреобразованные элементы рассматриваемой полной ортогональной системы $\{\varphi_n\}$:

$$A(\varphi_n) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}\varphi_k(x) .$$

Если это условие не соблюдалось хотя бы для одного используемого элемента системы, приходилось избегать преобразования в этом виде. Но даже если данное условие оказалось справедливым для каждого элемента, приходилось вносить поправки на погрешности, возникающие на практике ввиду вынужденного ограничением бесконечного ряда конечным:

$$A(\varphi_n) \approx \sum_{k=0}^{N} a_{n,k}\varphi_k(x) .$$

Если погрешности оказались приемлемыми или вовсе отсутствуют, остается главная вычислительная проблема, связанная с длительностью процесса, имеющего квадратичную временную сложность $O(N^2)$, ведь для вычисления векторов значений коэффициентов разложения приходиться прибегать к матричному перемножению вида:

$$\overline{C^*} = \mathbf{A}\overline{C} = \begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \dots & a_{0,N} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \dots & a_{1,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N,0} & a_{N,1} & \dots & a_{N,N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \vdots \\ C_N \end{pmatrix} . \qquad (3.4.1)$$

В целях ускорения для таких случаев производится поиск эквивалентных матричных преобразований, описанных через частично, либо полностью диагонализированные матрицы, что повышает скорость вычисления на порядок до линейного $O(N)$. Ясно, что матрица $\mathbf{A}$ будет диагональной, если преобразование каждого элемента $A(\varphi_n)$ можно представить в виде некоторой линейной формы постоянной длины $(q + p + 1)$:

$$A(\varphi_n) = \sum_{k=-p}^{q} a_{n,k}\varphi_{n+k}(x) . \qquad (3.4.2)$$

В таких «хороших» случаях МКД фактически сводиться к одной фазе вычислений – диффузии коэффициентов, и вычисления полностью совпадают в этом случае с соответствующими быстрыми матричными операциями. Однако свести сами матричные операции к форме (3.4.2) удается весьма редко и довольно сложно.

Второе условие, на которое нами предлагается заменить (3.4.2), более слабое, фактически может быть сформулировано как условие существования для любого индекса линейной зависимости между соседними элементами преобразованной системы и соседними элементами самой системы:

$$\sum_{k=-1}^{d} \nabla_k(n) A(\varphi_{n-k}) - \sum_{k=-p}^{q} \Delta_k(n) \varphi_{n+k} = 0, \qquad (3.4.3)$$

т.е. линейной связи между отрезками конечной длины из преобразованных элементов системы $A(\varphi_{n-d}),...,A(\varphi_{n+1})$ и элементов из системы $\varphi_{n-p},...,\varphi_{n+q}$, причем d,q,p – константы, независящие от индекса n.

Второе условие более выгодно для практического применения и, как показано выше, приводит к соответствующим вычислениям линейной сложности, что на порядок быстрее процесса, продиктованного условием (3.4.1). Ввиду того, что условие (3.4.3) слабее (3.4.1), для первого из них существует более широкий класс преобразований и ортогональных систем.

Ряд свойств описанных ранее намного упрощает выводы соответствующих форм для рекуррентных соотношений. Например, легко видеть, что (3.4.3) также всегда справедливо для обратного линейного преобразования $A^{-1}()$, что означает применимость МКД и для обратного преобразования, причем легко рассчитать новые коэффициенты

$$\nabla_k^{(-1)} = \frac{\Delta_k}{\Delta_q}, \quad \Delta_k^{(-1)} = \frac{\nabla_k}{\Delta_q}.$$

В случае использования иных принципов спектральных вычислений обратимость вычислительного процесса уже далеко не так очевидна. Ясно, что линейная форма условия (3.4.3) описывает некоторый вид взаимодействий между коэффициентами разложения, протекающих под действием разных преобразований. В работе раскрывается ряд из них, дающий основание для развития и применения МКД в решении различных практических задач.

Для теоретических исследований условие (3.4.3) также оказывается весьма полезным, позволяя наблюдать интересную связь между различными преобразованиями, ортогональными системами и методами вычислений. Покажем на следующем примере, какая связь существует между изложенным в работе методом, основанным на рекуррентных соотношениях и соответствующими матричными операциями.

Пример 3.4.1: Пусть функция $f(x) \in L_\rho^2(a,b)$ представлена в виде ряда по ортогональным полиномам Сонина-Лагерра $\{l_n^\alpha\}$ параметра $\alpha = 2$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} C_n l_n^{(2)}(x) \tag{3.4.4}$$

и требуется найти результат дифференцирования ряда (3.4.4), представленный в той же ортогональной системе $\{l_n^\alpha\}$:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{N} C_n^* l_n^{(2)}(x)\,. \tag{3.4.5}$$

Подобному преобразованию вектора коэффициентов $\{C_n\}$ соответствует, например, следующее матричное преобразование:

$$\overline{C^*} = \mathbf{A}\overline{C} = \begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \dots & a_{0,N} \\ 0 & a_{1,1} & \dots & a_{1,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{N,N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \vdots \\ C_N \end{pmatrix}, \tag{3.4.6}$$

где $a_{i,j} = \int_a^b l_i^{(2)} \left(l_j^{(2)} \right)' x e^{-x/2} dx$ – заранее вычисленные значения.

С другой стороны, согласно (2.*7.12) этому же преобразованию соответствует рекуррентное соотношение вида

$$\left(l_{n+1}^{(2)}\right)' = 3\left(l_{n}^{(2)}\right)' - 3\left(l_{n-1}^{(2)}\right)' + \left(l_{n-2}^{(2)}\right)' - \frac{1}{2}\left[l_{n+1}^{(2)} - \frac{n-1}{n+1}l_{n}^{(2)} - \frac{n+3}{n+1}l_{n-1}^{(2)} + l_{n-2}^{(2)}\right].$$

Вспомним, в параграфе 3.2 говорилось, что во время вычислительной фазы, именуемой каскадом коэффициентов разложения, влияние значения каждого верхнего коэффициента на нижние может многократно увеличиваться по мере спуска к началу таблицы. Ясно, что степень этого влияния, т.е. сложений вида

$$C'_n = C_n + \sum_{k=1}^{N-n} S_k C_{n+k} \ ,$$

определяется исключительно рекуррентным соотношением, точнее «каскадной» частью: $S_{k+1} = 3S_k - 3S_{k-1} + S_{k-2}$ при начальных $S_0 = 1, S_1 = 3, S_2 = 6$ и не зависит от значений других коэффициентов, описывая процесс вида:

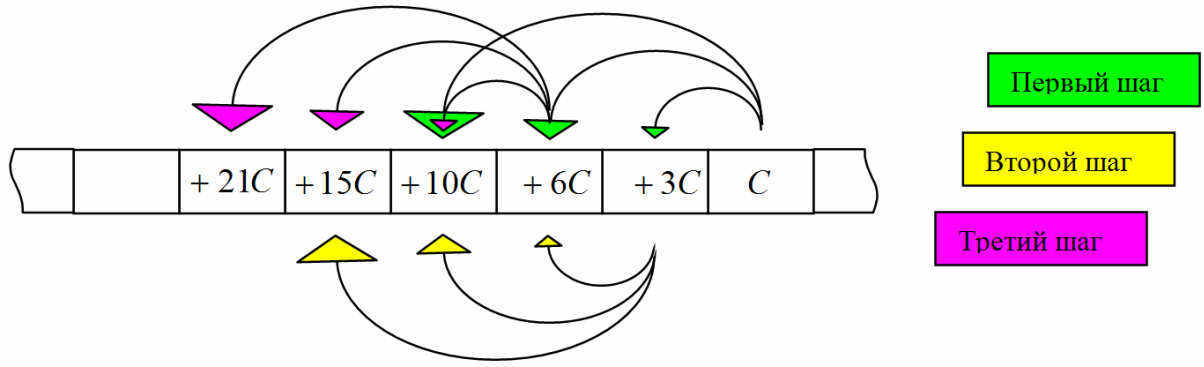


Рис. 3.4.1

Отсюда видим, что вычисление промежуточных коэффициентов $\{C'_n\}$ на этапе каскада равнозначно матричной операции вида:

$$\overline{C'} = \mathbf{A}_{\nabla}\overline{C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 10 & \cdots & S_{N-1} \\ & 1 & 3 & 6 & 10 & \vdots \\ & & 1 & 3 & 6 & 10 \\ & & & 1 & 3 & 6 \\ & 0 & & & 1 & 3 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ C_N \end{pmatrix}, \qquad (3.4.7)$$

где $S_k = \{1, \ 3, \ 6, \ 10, \ 21, \ \ldots\}$ – независящие от индекса значения.

В свою очередь, вычисления на этапе диффузии коэффициентов можно представить в виде перемножения:

$$\overline{C^*} = \mathbf{A}_\Delta \overline{C'} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & -1 & & 0 \\ & -1 & 0 & 5/3 & \ddots & \\ & & -1 & 1/3 & \ddots & -1 \\ & & & -1 & \ddots & \frac{N+2}{N} \\ & 0 & & & \ddots & \frac{N-2}{N} \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C'_0 \\ C'_1 \\ C'_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ C'_N \end{pmatrix}, \qquad (3.4.8)$$

причем матрица $\mathbf{A}_\Delta$ – частично диагональная. Тогда, согласно (3.4.7), (3.4.8) и (3.4.6) приходим к интересному выводу, что

$$\mathbf{A}\overline{C} = \mathbf{A}_\Delta\left(\mathbf{A}_\nabla \overline{C}\right).$$

Таким образом, если по каким-либо причинам проблематично отыскать матрицу $\mathbf{A}$ напрямую, но известно рекуррентное соотношение вида (?), то можно воспользоваться эквивалентным выражением, в общем виде:

$$\begin{pmatrix} C_0^* \\ C_1^* \\ \vdots \\ C_N^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots & \cdots & \Delta_{-p}^{p} & & & \\ \Delta_q^0 & & & \Delta_{-p}^{p+1} & 0 & \\ & \Delta_q^1 & & & \ddots & \\ & & \ddots & & & \Delta_{-p}^{N} \\ & 0 & & \ddots & & \vdots \\ & & & & \Delta_q^{N-q} & \cdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_0 & S_1 & \cdots & S_{N-1} \\ & S_0 & S_1 & \vdots \\ & & S_0 & S_1 \\ 0 & & & S_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \vdots \\ C_N \end{pmatrix}. \qquad (3.4.9)$$

Изложение основ метода спектральных каскада и диффузии на этом будем считать законченным. Прежде чем перейдем к рассмотрению примеров применения метода, представим некоторые обобщения метода на область

ортогональных систем дискретного аргумента, на класс нелинейных преобразований и на класс вычислительных машин с параллельной архитектурой исполнения команд.

Глава IV

Обобщение алгебры спектральных преобразований

В данной главе описаны основные направления дальнейшего развития теории алгебры спектральных преобразований в практических задачах. На сегодня наметилось три таких направления, каждому из которых посвящен отдельный параграф данной главы:

1. Быстрые нелинейные спектральные преобразования.
2. Быстрые спектральные преобразования для ортогональных систем дискретного аргумента.
3. Сверхбыстрые спектральные преобразования на системах с параллельной архитектурой вычислений.

Рис. 4

4.1 Быстрые нелинейные спектральные преобразования

В главе II обсуждалась возможность быстрого проведения линейных преобразований функций, представленных рядами:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} C_n \varphi_n(x), \tag{4.1.1}$$

где $\{\varphi_n(x)\}$ – система ортогональных функций, определенная некоторым семейством классических ортогональных полиномов. Было показано, что для широкого класса функций можно построить процесс быстрых преобразований на основе предложенного метода спектрального каскада и диффузии.

В параграфе 3.2 мы пришли к выводу, что основной отличительной чертой быстрого МКД от соответствующих матричных операций является введение в рассмотрение быстрых рекурсивных операций, называемых спектральным каскадом коэффициентов разложения. Здесь покажем применимость этого принципа для ускорения внутриспектральных вычислений в случае некоторых нелинейных преобразований, связанных с операцией произведения функций (рядов).

Прежде рассмотрим задачу перемножения рядов, представленных через систему ортогональных полиномов. Итак, требуется найти произведение функций $f(x)$ и $g(x)$, представленных конечными рядами

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} C_n P_n(x), \tag{4.1.2}$$

$$g(x) = \sum_{k=0}^{K} D_k P_k(x) \tag{4.1.3}$$

в виде ряда

$$h(x) = \sum_{n=0}^{M} E_n P_n(x). \tag{4.1.4}$$

Ясно, что ряд (4.1.4) ограничен числом $M = N + K$. Тогда для $h(x) = f(x)g(x)$ получим:

$$\left(\sum_{n=0}^{N} C_n P_n(x)\right)\left(\sum_{k=0}^{K} D_k P_k(x)\right) = \sum_{n=0}^{N+K} E_n P_n(x). \qquad (4.1.5)$$

Проводя простое по членное перемножение в левой части (4.1.5), за время $O(NK)$, очевидно, можно свести это выражение к билинейной форме:

$$\left(\sum_{n=0}^{N} C_n P_n(x)\right)\left(\sum_{k=0}^{K} D_k P_k(x)\right) = \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{K} b_{nk} P_n(x) P_k(x),$$

где $b_{nk} = C_n D_k$. (4.1.6)

Каким образом можно в общем случае понизить временную сложность $O(NK)$ вычисления билинейной формы (4.1.6) пока неизвестно, но принцип каскада коэффициентов, как будет показано ниже, позволяет ограничиться этим порядком сложности, в отличие от применяемых для этой цели матричных операций. Действительно, если элементы a_{ijk} матрицы **A** размера $N \times K \times (N + K)$ определены выражением:

$$a_{ijk} = \int_a^b \left(P_i(x) P_j(x)\right) P_k(x) \rho(x) dx,$$

то, согласно [19], получим равенство

$$P_i(x) P_j(x) = a_{ij,0} P_0(x) + a_{ij,1} P_1(x) + \ldots + a_{ij,i+j} P_{i+j}(x). \qquad (4.1.7)$$

Очевидно, благодаря матрице **A** можно разложить каждый элемент билинейной формы (4.1.6) в ряд вида (4.1.7) и затем суммированием всех рядов, общим числом $N \times K$ и средней длины $(N + K)/2$, добиться приведения к виду (4.1.1).

Таким образом, при вычислении нелинейного преобразования вида (4.1.5) матричным способом, описанным выше, получим временную сложность

соответствующих алгоритмов равную $O(N^2K + NK^2)$ или, при равной длине рядов (4.1.2) и (4.1.3), получим кубический порядок сложности $O(N^3)$.

Для практических целей алгоритмы с полиномиальной временной сложностью третьей степени часто оказываются недопустимо длительными по времени исполнения. Однако при прежней постановке задачи МКД приводит к временной сложности соответствующих алгоритмов равной $O(NK)$ (или $O(N^2)$), что оказывается на порядок ниже, чем в случае матричных операций и в точности соответствует порядку времени, затраченному при вычислении самой билинейной формы (4.1.6).

Итак, если $\{P_n(x)\}$ – произвольная система ортогональных полиномов, то согласно [13], должна существовать связь между элементами системы, выражаемая рекуррентным соотношением вида:

$$xP_n(x) = \alpha_n P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x). \tag{4.1.8}$$

Покажем, что произвольный член $P_{i+1}(x)P_j(x)$ билинейной формы (4.1.6) можно представить в виде следующей рекуррентной формулы:

$$P_{i+1}P_j = \frac{\alpha_j}{\alpha_i} P_i P_{j+1} + \frac{\beta_j - \beta_i}{\alpha_i} P_i P_j + \frac{\gamma_j}{\alpha_i} P_i P_{j-1} - \frac{\gamma_i}{\alpha_i} P_{i-1} P_j \tag{4.1.9}$$

Действительно, если преобразовать

$$P_{i+1}P_j = \left(\frac{x - \beta_i}{\alpha_i} P_i - \frac{\gamma_i}{\alpha_i} P_{i-1} \right) P_j = \frac{x}{\alpha_i} P_i P_j - \frac{\beta_i}{\alpha_i} P_i P_j - \frac{\gamma_i}{\alpha_i} P_{i-1} P_j, \tag{4.1.10}$$

а затем воспользоваться (4.1.8), то после приведения слагаемых получим (4.1.9). Используя выражение (4.1.9), очевидно, можно представить правую часть (4.1.6) в виде:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{K} b_{nk} P_n P_k &= \sum_{k=0}^{K} b_{Nk} P_N P_k + \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{K} b_{nk} P_n P_k = \\ &= \sum_{k=0}^{K} b_{Nk} \left(\frac{\alpha_k}{\alpha_{N-1}} P_{N-1} P_{k+1} + \frac{\beta_k - \beta_{N-1}}{\alpha_{N-1}} P_{N-1} P_k + \frac{\gamma_k}{\alpha_{N-1}} P_{N-1} P_{k-1} - \frac{\gamma_{N-1}}{\alpha_{N-1}} P_{N-2} P_k \right) + \\ &\quad + \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{K} b_{nk} P_n P_k = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{K+1} b_{nk}^{(1)} P_n P_k, \end{aligned} \tag{4.1.11}$$

где $b_{nk}^{(1)}$ – новые коэффициенты.

Заметим, что значения матрицы $\mathbf{B}^{(1)} = \left| b_{nk}^{(1)} \right|$ новой полученной билинейной формы (4.1.11) полностью совпадают со значениями предыдущей матрицы коэффициентов $\mathbf{B} = \left| b_{nk} \right|$ для формы (4.1.6), за исключением того, что нижняя строка значений $\{b_{Nk}\}$ теперь отсутствует (обнуляется), но эти значения суммируются с двумя вверху лежащими строками по правилу, определяемому соотношением (4.1.9).

Как видим, нам удалось понизить степень внешней из двух сумм билинейной формы (4.1.11). Повторяя эту операцию N раз, очевидно, получим:

$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{K} b_{nk} P_n(x) P_k(x) = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{K+1} b_{nk}^{(1)} P_n(x) P_k(x) = \sum_{n=0}^{N-2}\sum_{k=0}^{K+2} b_{nk}^{(2)} P_n(x) P_k(x) = \cdots$$

$$\cdots = \sum_{n=0}^{1}\sum_{k=0}^{K+N-1} b_{nk}^{(N-1)} P_n(x) P_k(x) = \sum_{k=0}^{K+N} b_{0k}^{(N)} P_0(x) P_k(x) \equiv \sum_{k=0}^{K+N} b_{0k}^{(N)} P_k(x).$$

Таким образом, при использовании каскада коэффициентов разложения и на основе рекуррентного соотношения (4.1.9) получено решение задачи перемножения рядов (4.1.5) в виде верхней строки полученной конечной матрицы (4.1.12):

$$E_n = b_{0k}^{(N)}. \qquad (4.1.12)$$

Легко оценить время, затраченное на каждом шаге вычислений вида (4.1.11), сводящееся фактически к численному преобразованию трех строк, проводимому согласно рекуррентному соотношению (4.1.9) – оно линейно относительно длины строк K. Выше говорилось, что число необходимых шагов выстроенного рекурсивного процесса равно длине первого из рядов – N. Теперь несложно оценить суммарную временную сложность алгоритма, реализующего нелинейное преобразование (4.1.5): $O(NK)$.

Возведение функции в квадрат

$$A(f) = f^2(x) \tag{4.1.13}$$

является важным примером из класса обсуждаемых выше нелинейных преобразований. Рассмотрим на следующем примере вычислительную схему соответствующего алгоритма, имеющего, как мы знаем, временную сложность $O(N^2)$.

Итак, пусть функция задана в виде (4.1.1) и необходимо представить результат нелинейного преобразования (4.1.13) этой функции

$$g(x) = f^2(x) \tag{4.1.14}$$

в виде ряда (4.1.1). Тогда ясно, что первоначальная матрица $\mathbf{B} = |b_{ij}| = |C_i C_j|$.

Для практического использования важно помнить, что перед дальнейшими вычислениями необходимо дополнить матрицу нулевыми значениями до размера $N \times 2N$. Согласно выше сказанному, на практике получим матрицу $\mathbf{B}^{(1)}$ из $\mathbf{B}$ после ряда определенных изменений последней – разложения всех значений N-ой строки на значения двух верх лежащих строк с весами, взятыми из рекуррентного соотношения (4.1.9). Первый шаг определения значений для следующей матрицы $\mathbf{B}^{(1)}$ схематически покажем на рисунке 4.1.1.

	0	1	2	3	$\cdots$	N	$N+1$	$N+2$	$\cdots$	$2N-1$	$2N$
0	$b_{0,0}$	$b_{0,1}$	$b_{0,2}$	$b_{0,3}$	$\cdots$	$b_{N,0}$	0	0	$\cdots$	0	0
1	$b_{1,0}$	$b_{1,1}$	$b_{1,2}$	$b_{1,3}$	$\cdots$	$b_{N,1}$	0	0	$\cdots$	0	0
2	$b_{2,0}$	$b_{2,1}$	$b_{2,2}$	$b_{2,3}$	$\cdots$	$b_{N,2}$	0	0	$\cdots$	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$N-3$	$b_{N-3,0}$	$b_{N-3,1}$	$b_{N-3,2}$	$b_{N-3,3}$	$\cdots$	$b_{N-3,N}$	0	0	$\cdots$	0	0
$N-2$	$b_{N-2,0}$	$b_{N-2,1}$	$b_{N-2,2}$	$b_{N-2,3}$	$\cdots$	$b_{N-2,N}$	0	0	$\cdots$	0	0
$N-1$	$b_{N-1,0}$	$b_{N-1,1}$	$b_{N-1,2}$	$b_{N-1,3}$	$\cdots$	$b_{N-1,N}$	0	0	$\cdots$	0	0
N	$b_{N,0}$	$b_{N,1}$	$b_{N,2}$	$b_{N,3}$	$\cdots$	$b_{N,N}$	0	0	$\cdots$	0	0
	0	1	2	3	$\cdots$	N	$N+1$	$N+2$	$\cdots$	$2N-1$	$2N$

Рис. 4.1.1

Все последующие шаги вычислительного процесса будут протекать аналогично, на каждом из которых мы будем раскладывать и обнулять всё более верхние строки: $N-1, N-2, N-3, \ldots$, пока на последнем N-ом шаге (рис. 4.1.2) мы не получим матрицу с единственной ненулевой, верхней строкой – она и будет, согласно (4.1.12), содержать требуемые коэффициенты разложения $\{D_n\}$ для квадрата функции $f^2(x)$.

$$
\begin{array}{c|cccccccccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & N & N+1 & N+2 & \cdots & 2N-1 & 2N \\
\hline
0 & b_{0,0}^{(N-1)} & b_{0,1}^{(N-1)} & b_{0,2}^{(N-1)} & b_{0,3}^{(N-1)} & \cdots & b_{0,N}^{(N-1)} & b_{0,N+1}^{(N-1)} & b_{0,N+2}^{(N-1)} & \cdots & b_{0,2N-1}^{(N-1)} & 0 \\
1 & b_{1,0}^{(N-1)} & b_{1,1}^{(N-1)} & b_{1,2}^{(N-1)} & b_{1,3}^{(N-1)} & \cdots & b_{1,N}^{(N-1)} & b_{1,N+1}^{(N-1)} & b_{1,N+2}^{(N-1)} & \cdots & b_{1,2N-1}^{(N-1)} & b_{1,2N}^{(N-1)} \\
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

Рис. 4.1.2

Вообще, для всех систем классических ортогональных полиномов коэффициенты соотношения (4.1.9) имеют аналитически выраженную функциональную зависимость от своего индекса и параметров системы (при их наличии) и довольно часто выражение вида (4.1.9) оказывается настолько просто выражено, что не требуется предварительного расчета. Так, например, для полиномов Лежандра получим соотношение (4.1.9) в виде:

$$\frac{iP_{i-1}P_j-(i+1)P_{i+1}P_j}{2i+1}=\frac{jP_iP_{j-1}-(j+1)P_iP_{j+1}}{2j+1}.$$

Возможность перемножения рядов ортогональных полиномов, безусловно, расширяет класс рассмотренных ранее линейных преобразований функций и также позволяет расширение класса самих используемых ортогональных

систем. Например, если представить соответствующую полиномиальной системе весовую функцию в виде аппроксимирующего ряда

$$\rho(x) \approx \sum_{n=0}^{M} R_n P_n(x) ,$$

то перемножение рядов ортогональных функций можно приближенно представить как два последовательных перемножения соответствующих полиномиальных рядов:

$$\left(\sum_{n=0}^{N} C_n p_n(x)\right)\left(\sum_{n=0}^{N} D_n p_n(x)\right) = \rho(x)\left(\sum_{n=0}^{N} C_n P_n(x)\right)\left(\sum_{n=0}^{N} D_n P_n(x)\right) \approx$$

$$\approx \sum_{n=0}^{M} R_n P_n(x)\left(\sum_{n,k=0}^{N} C_n D_k P_n(x) P_k(x)\right) = \ldots$$

В заключение хотелось бы обратить внимание на одно интересное свойство процесса, рассмотренного выше для преобразования (4.1.5). Оказывается, что при некоторых условиях данный вычислительный процесс становиться обратимым, что дает основание надеяться на то, что этим методом можно вычислить обратное нелинейное преобразование вида:

$$A(f) = \sqrt{f(x)} .$$

Для ряда случаев на практике получены корректные результаты, однако, пока остается не исследованным вопрос о строгом обосновании условий, при которых можно проводить подобные спектральные вычисления.

Заметим, что излагаемый здесь способ реализации двухмерного каскада спектральных коэффициентов предложен в ходе успешного выполнения курсовых работ студентами факультета ВМиК МГУ им. Ломоносова. Результаты исследований молодых ученных опубликованы в совместной работе [19].

4.2 Быстрые спектральные преобразования для ортогональных систем дискретного аргумента

Быстрые спектральные преобразования для систем классических ортогональных полиномов дискретного аргумента являются естественным обобщением алгебры спектральных преобразований на случай использования полиномов Хана (Гана), Мейкснера, Шарлье, Кравчука и Чебышева дискретного аргумента (схема ниже). Перечисленные полиномы являются решениями разностного аналога гипергеометрического уравнения.

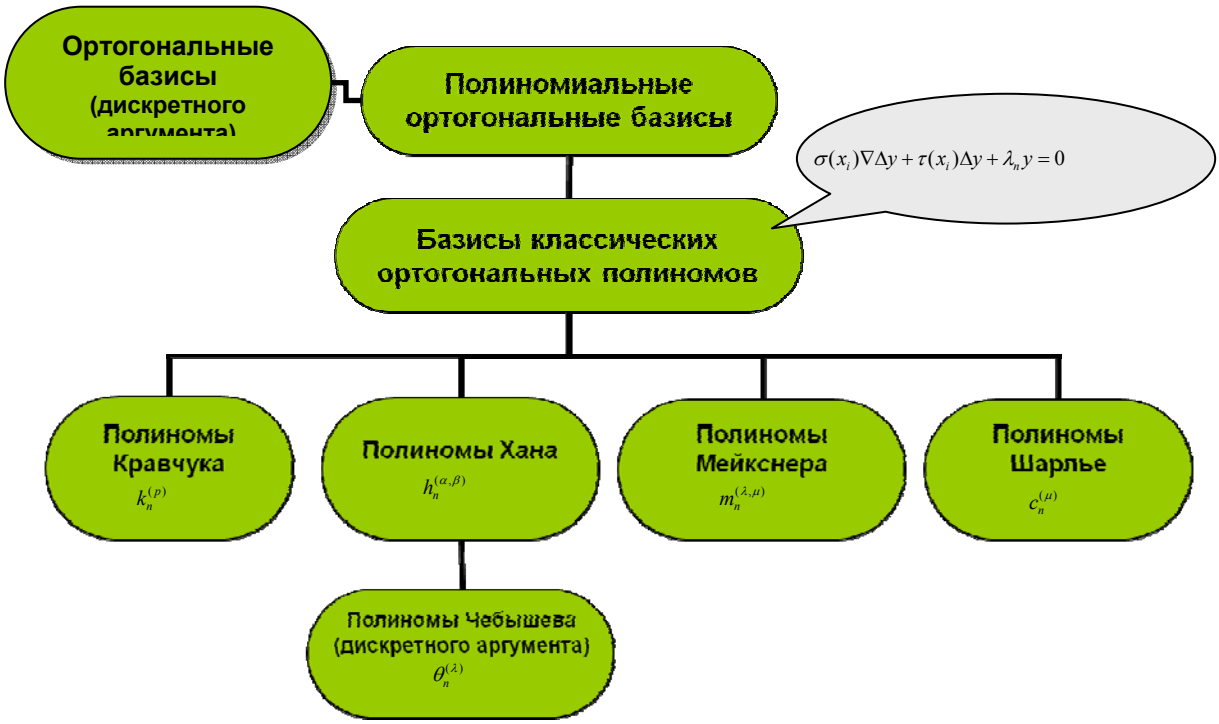


Рис. 4.2.1

Этот параграф посвящен изложению обобщения действия метода каскада и диффузии на случай классических полиномов дискретного аргумента: полиномов Хана (Гана), Мейкснера, Шарлье и др.

Прежде вспомним основные сведения, известные об этом классе функций. Для равномерной решетки $a \le x_i \le b$, имеющей шаг $h = x_{i+1} - x_i$, определим гипергеометрическое уравнение (1.1.1) в виде разностного аналога [13]:

$$\frac{\tilde{\sigma}(x)}{h}\left[\frac{y(x+h)-y(x)}{h} - \frac{y(x)-y(x-h)}{h}\right] + \\ + \frac{\tilde{\tau}(x)}{2}\left[\frac{y(x+h)-y(x)}{h} + \frac{y(x)-y(x-h)}{h}\right] + \lambda y = 0, \qquad (4.2.1)$$

где $\tilde{\sigma}(x), \tilde{\tau}(x)$ – полиномы не выше второй и первой степени соответственно, постоянная λ – постоянная.

Тогда можно утверждать, согласно [13], что при некоторых $\tilde{\sigma}(x), \tilde{\tau}(x)$ для ряда значений $\lambda \in \{\lambda_n\}$ получим ряд полиномиальных решений $\{P_n^{(h)}(x)\}$ разностного уравнения (4.2.1), определяемых значения $y(x_i) = P_n^{(h)}(x_i)$ на решетке $a \le x_i \le b$. Ввиду того, что уравнение (4.2.1) аппроксимирует (1.1.1) со вторым порядком точности относительно h, при $h \to 0$ значения решений разностного уравнения (4.2.1) будут стремиться к значениям полиномиальных решений гипергеометрического уравнения (1.1.1):

$$\{P_n^{(h)}(x)\} \xrightarrow{h \to 0} \{P_n(x)\}, \qquad (4.2.2)$$

то есть полиномы $\{P_n^{(h)}(x)\}$ приближают соответствующие полиномы $\{P_n(x)\}$ и замечательным результатом, является то, что каждая система $\{P_n^{(h)}(x)\}$ к тому же удовлетворяет на решетке $a \le x_i \le b-1$ условию ортогональности, но не приближенно, а точно:

$$\sum_{x_i=a}^{b-h} P_n^{(h)}(x_i) P_m^{(h)}(x_i) \rho(x_i) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n = m, \qquad (4.2.3)$$

где значения $\rho(x_i)$ определяются соответствующим (4.2.1) уравнением:

$$\frac{\rho(x+h)}{\rho(x)} = \frac{\sigma(x)+\tau(x)}{\sigma(x+h)}. \qquad (4.2.4)$$

Ввиду произвольности значения шага часто удобно принимать $h=1$ на сетке $x_0=0, x_1=1, x_2=2,...$ Для подобного случая известны рекуррентные соотношения вида (2.3.1) для всех классических ортогональных полиномов дискретного аргумента. Например, для полиномов Хана, соответствующих полиномам Якоби непрерывного аргумента, на сетке $0 \le x_i \le N$ получим рекуррентную формулу

$$\begin{aligned} xH_n^{(\alpha,\beta)}(x,N) &= \frac{(n+1)(\alpha+\beta+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+1)(\alpha+\beta+2n+2)} H_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x,N) + \\ &+ \left(\frac{\alpha-\beta+2N-2}{4} + \frac{(\beta^2-\alpha^2)(\alpha+\beta+2N)}{4(\alpha+\beta+2n)((\alpha+\beta+2n+2)} \right) H_n^{(\alpha,\beta)}(x,N) + \\ &+ \frac{(\alpha+n)(\beta+n)((\alpha+\beta+N+n)(N-n)}{(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n+1)} H_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x,N), \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

а для полиномов Чебышева дискретного аргумента, соответствующих полиномам Лежандра, получим на той же сетке соотношение (2.3.1) в виде:

$$x\theta_n(x,N) = \frac{n+1}{2(2n+1)}\theta_{n+1}(x,N) + \frac{N-1}{2}\theta_n(x,N) + \frac{n(N^2-n^2)}{2(2n+1)}\theta_{n-1}(x,N). \tag{4.2.6}$$

Интересно вспомнить, что полиномы Лежандра являются частным случаем полиномов Якоби:

$$P_n(x) = P_n^{(0,0)}(x),$$

и это взаимное отношение также сохраняется для соответствующих дискретных аналогов:

$$\theta_n(x,N) = H_n^{(0,0)}(x,N),$$

что легко подтвердить на основании соотношений (4.2.1) и (4.2.2).

Однако следует помнить, что некоторые операторы, определенные ранее для функций непрерывного аргумента, понимаются несколько иначе для сеточных функций. Так, например, производная функций определена теперь в виде разностного дифференцирования:

$$\frac{\Delta f_i}{\Delta x_i} = \frac{f_{i+1}-f_i}{x_{i+1}-x_i} \tag{4.2.7}$$

или, в случае $\Delta x_i = h = 1$, получим

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i. \tag{4.2.8}$$

Обратим внимание на то, что производная (4.2.7) может быть определена не на всей прежней сетке $0 \le x_i \le N$, а на укороченной ее части: $0 \le x_i \le N-1$.

Таким образом, например, для систем ортогональных полиномов Кравчука и для оператора (4.2.8) получим соотношение:

$$\Delta K_n^{(p)}(x,N) = K_{n-1}^{(p)}(x,N-1).$$

Ясно, что длина решетки является параметром, определяющим систему полиномов и поэтому производная (4.2.8) определена, вообще говоря, через полином другой системы и на другой укороченной сетке. Однако, ввиду того, что полиномы Кравчука соответствуют полиномам Эрмита и являются их аппроксимацией с точностью $O(N^{-2})$ [15], при условии $n << N$ имеем приближенное равенство вида:

$$K_n^{(p)}(x,N) \approx K_{n-1}^{(p)}(x,N-1),$$

что приводит к требуемому приближенному равенству

$$\Delta K_n^{(p)}(x,N) \overset{n<<N}{\approx} K_{n-1}^{(p)}(x,N).$$

Проводя аналогичные преобразования для операции разностного дифференцирования можно найти требуемые рекуррентные соотношения для остальных классических полиномов дискретного аргумента. Для этого потребуются следующие равенства:

$$\Delta H_n^{(\alpha,\beta)}(x,N) = (\alpha+\beta+n+1)H_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x,N-1),$$
$$\Delta M_n^{(\gamma,\mu)}(x) = -\frac{n(1-\mu)}{\mu} M_{n-1}^{(\gamma+1,\mu)}(x),$$
$$\Delta C_n^{(\mu)}(x) = -\frac{n}{\mu} C_{n-1}^{(\mu)}(x).$$

Так, например, полиномы Майкснера $M_n^{(\gamma,\mu)}(x)$ определены на бесконечной сетке $0 \le x_i < \infty$, но при $h \to 0$ с точностью до постоянного множителя и линейной замены аргумента переходят в полиномы Сонина-Лагерра [13]:

$$\lim_{h\to 0} \frac{M_n^{(\gamma,1-h)}(s/h)}{n!} = L_n^{\gamma-1}(s),$$

или иначе запишем в виде:

$$\frac{1}{n!}M_n^{(\alpha+1,1-h)}(s/h) = L_n^{\alpha}(s) + O(h), \quad h \to 0\,.$$

Это позволяет провести на основании (4.2.4) рассуждения, аналогичные тем, что мы излагали в параграфе 2.5 на основании соотношений (2.5.2, 2.5.3, 2.5.4).

Таким образом, в общем, вычисление самих рекуррентных соотношений вида (?) требует применения технических приемов, изложенных нами ранее в параграфе 2.5, но для некоторых преобразований соотношения можно будет получить лишь в приближенном виде. При реализации вычислений на основе МКД основные принципы остаются без изменений.

Приведем в заключение пример организации некоторых преобразований в случае разложения функций в ряд ортогональных полиномов Кравчука:

Пример: Пусть нам известно спектральное представление функций:

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{N} C_n^{*} K_n^{(p)}(x, N),$$

$$f_2(x) = \sum_{n=0}^{N} C_n^{**} K_n^{(p)}(x, N).$$

Пусть далее требуется найти спектральное представление функции

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} C_n K_n^{(p)}(x, N)\,,$$

если известно, что функция $f(x)$ определена через функции $f_1(x), f_2(x)$ в виде некоторого аналитического преобразования этих функций.

Для ряда простых преобразований легко получим решения, отраженные в таблице 4.2.1.

N	Преобразования функций	Операции над коэффициентами разложения
1	$f = \alpha f_1$	$C_n = \alpha\ C_n^*$
2	$f = f_1 + f_2$	$C_n = C_n^* + C_n^{**}$
3	$f = f_1'$	$C_n \approx C_{n+1}^*$
4	$f = \int f_1 dx$	$C_n \approx C_{n-1}^*$
5	$f = x f_1$	$C_n = \gamma_{n+1} C_{n+1}^* + \beta_n C_n^* + \alpha_{n-1} C_{n-1}^*$

Таблица 4.2.1

На рисунке 4.2.2 каждая операция, представленная в таблице 4.2.1, проиллюстрирована в виде соответствующей вычислительной схемы [15].

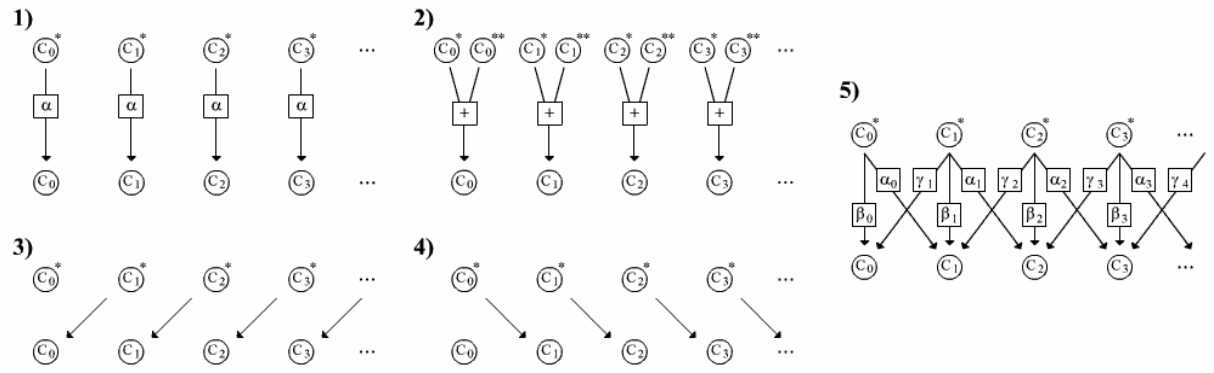


Рис. 4.2.2

Полученные результаты будут полезны при создании аппарата обработки информационных массивов на основе спектральных методов.

4.3 Сверхбыстрые спектральные преобразования на системах с параллельной архитектурой вычислений

В главе III рассмотрен способ выполнения быстрых преобразований функций посредством изменения их спектров. Было показано, что можно предложить алгоритмы обработки, основанные на простом «смешивании» соседних коэффициентов спектра при знании особых рекуррентных соотношений. В данном параграфе покажем, что этот способ, ускоривший расчеты при реализации на ЭВМ с линейной архитектурой, позволяет естественным образом распространить эти алгоритмы и на системы с параллельной архитектурой выполнения команд.

В качестве иллюстрации приведем следующий пример расчета некоторого функционала от двух функций, представленных рядами ортогональных полиномов Кравчука.

Пример 5. Пусть для функций f_1, f_2*, заданных рядами (Табл. 4.3.1) и представленных в виде векторных матриц (строк), требуется вычислить спектральное представление действия функционала:*

$$f(x) = \int_0^x \left(\alpha f_1'(x) + x^2 f_2(x)\right) dx\,, \qquad (4.1.1)$$

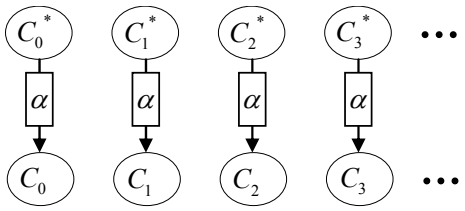
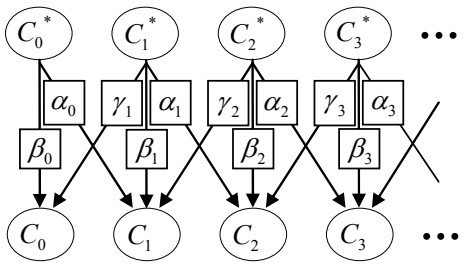
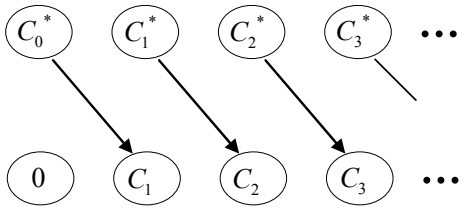
в том же виде (Табл. 4.3.1).

Спектральное представление функции	Строковое представление функции в виде вектора соответствующих значений
$f_1(x) = \sum_{n=0}^{N} C_n^{*} K_n(x)$	$f_1(x)$: C_0^{*} C_1^{*} C_2^{*} C_3^{*} … C_N^{*}
$f_2(x) = \sum_{n=0}^{N} C_n^{**} K_n(x)$	$f_2(x)$: C_0^{**} C_1^{**} C_2^{**} C_3^{**} … C_N^{**}
$f(x) = \sum_{n=0}^{N} C_n K_n(x)$	$f(x)$: C_0 C_1 C_2 C_3 … C_N

Таблица 4.3.1. Входные данные задачи и требуемый результат как строки коэффициентов разложения соответствующих функций.

Ясно, что представленный функционал есть суперпозиция простых аналитических преобразований, каждого из которых можно добиться соответствующим изменением строки (т.е. преобразованием спектра). Причем данные преобразования строк можно производить независимо, то есть параллельно. Покажем это схематически на примере некоторых соответствий, найденных в работе [15], в случае использования в качестве ортогонального базиса системы полиномов Кравчука (табл. 4.3.2).

Отсюда легко придем к общей схеме распараллеленных вычислений коэффициентов разложения (рис. 4.3.1), соответствующих вычислению функционала (4.1.1), сводящейся к очевидной компоновке из ранее рассмотренных элементарных блоков 1-5 (табл. 4.3.2).

	Аналитическое преобразование	Соответствующее изменение спектральных коэффициентов
1.	$f(x) = \alpha f_1(x)$	
2.	$f(x) = x f_1(x)$	
3.	$f(x) \approx \int_0^x f_1(t)dt$ $f(x) = \sum_{t=0}^{x} f_1(t) + o(N/T)$	

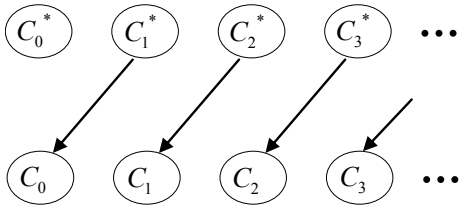
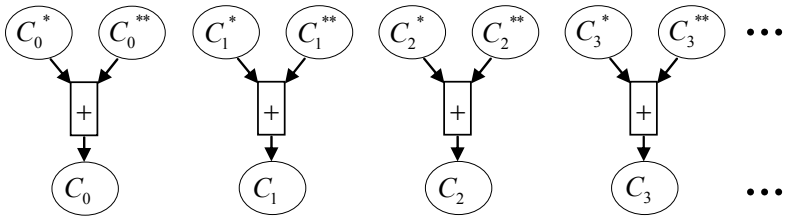
4.	$f(x) \approx f_1'(x)$ $f(x) = \Delta f_1(x) + o(N/T)$	
5.	$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$	

Таблица 4.3.2. Элементарные преобразования над строками коэффициентов разложения при использовании ортогональных полиномов Кравчука.

Так в работе показана принципиальная возможность распараллеливания вычислительного процесса, реализующего преобразование вида (4.1.1).

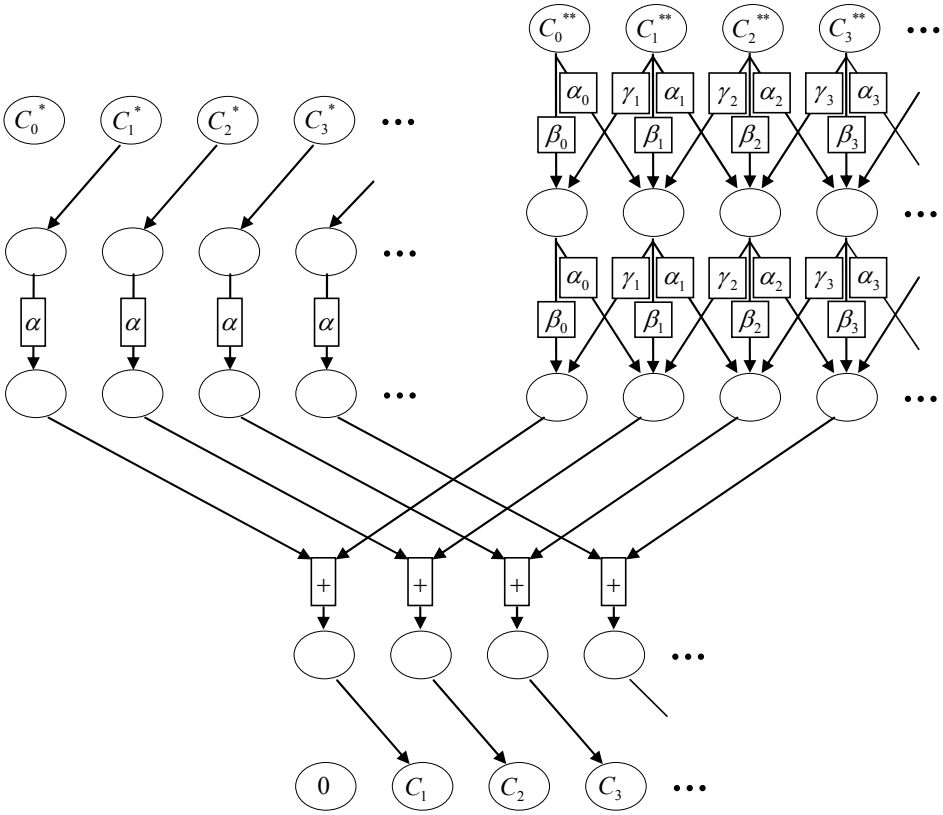


Рис. 4.3.1. Схема распараллеливания спектрального вычисления (4.1.1).

Безусловно, существует множество разнообразных вычислительных систем параллельной архитектуры исполнения команд, на которых естественным образом предполагается реализовать схему вычислений, представленную на рисунке 4.3.1. Перечислим некоторые из них.

Системы параллельных вычислений, построенных в виде сети компьютеров, организованных и сообщающихся по принципу MPI (Message Passing Interface) могут легко быть приспособлены для осуществления данной цели. Действительно, для реализации этой вычислительной схемы достаточно разбить данные (вектор значений коэффициентов разложения) на блоки, соответствующим образом распределить блоки в сети и затем воссоединить полученные на разных компьютерах результаты параллельных вычислений в виде конечного ряда значений.

Появившийся с поколением Pentium MMX принцип SIMD (Single Instruction Multiple Data – одна команда на множество данных) нашел широкое применение во многих популярных современных приложениях. Но вообще, принцип SIMD предназначен для ускорения операций вида 1 (Табл. 4.3.2), что при соответствующей организации вычислений также делает его применимым для всей схемы (рис. 4.3.1).

Схема вычислений, предложенная в Примере 5, допускает реализацию на аналого-цифровых вычислительных машинах (АЦВМ), Действительно, если все значения ряда, расположенные в вершинах графа, построенного соответственно представленной топологии (рис. 4.3.1), переведены в некоторые физические величины (напряжение тока, давление жидкости, количество химического реагента и т.д.), а ребра графа реализованы в виде соединительных каналов, имеющих определенный вес, тогда операции дифференцирования и интегрирования определят простой

количественный перенос величин на позицию вниз и вверх соответственно (3-4, Табл. 4.3.2), суммирование функций определит обыкновенное суммирование величин, соответствующих коэффициентам разложения (5, Табл. 4.3.2), а умножение на скаляр (1, Табл. 4.3.2) и умножение на аргумент (2, Табл. 4.3.2) реализуются в виде взвешенного суммирования соседних величин. По этому же принципу могут быть построены топологии некоторых разновидностей клеточных автоматов.

Компьютерные нейронные сети, обратно, являются цифровым аналогом биологических графов со взвешенным суммированием и также пригодны для реализации параллельных вычислений в ходе внутриспектральных преобразований функций. Интересно, что для этого понадобится знание топологии графа и значений весов ребер, найденных аналитически, а не в процессе обучения нейронной сети, как это обычно имело место до сих пор. В этой связи, возможно, потребуется различать вычислительные машины подобного типа как детерминированные нейронные сети.

Итак, видим, что для каждой операции из Таблицы 4.3.2 получим одно действие над множеством начальных данных и, более того, для каждого значения расчет может производиться одновременно и независимо. Такой вид повышения производительности вычислительных машин называется *векторизацией вычислительного процесса*. Вообще, в случае, когда рекуррентное соотношение состоит только из диффузной части, как для преобразования (4.1.1), общая схема распараллеливания вычислений всегда ограничится применением одной лишь векторизации процесса, т.е. разбиванием ряда значений на отдельно вычисляемые блоки длиной вплоть до одной отдельной величины.

Однако в случае, когда присутствует каскадная часть рекуррентного соотношения, распараллеливание также возможно. Действительно, т.к. при спектральном каскаде отдельного коэффициента разложения задействован ограниченный участок ряда нижних значений, если потребуется вычислить один тип каскада для множества рядов значений, соответствующих, например, коэффициентам различных функций $f_1, f_2, f_3, \ldots$, то можно организовать процесс так, чтобы вычисления каскада последующих рядов начинались еще до завершения каскада первых. Этот вид повышения производительности вычислительных машин обычно называется *конвейеризацией вычислительного процесса*. Проиллюстрируем на следующем примере реализацию конвейеризации вычислений в нашем случае.

Пример 6. Пусть каждая функция f из множества функций $f_1, f_2, f_3, \ldots$ представлена рядом ортогональных полиномов Лежандра $\{P_n(x)\}$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} C_n P_n(x). \qquad (4.2.1)$$

Требуется предложить схему распараллеливания вычислительного процесса в случае расчета операции дифференцирования функций $f_1, f_2, f_3, \ldots$ на основании имеющегося рекуррентного соотношения:

$$P'_{n+1}(x) = P'_{n-1}(x) + (2n+1)P_n(x). \qquad (4.2.2)$$

Очевидно, что для соотношения (4.2.2) можно предложить трехслойный граф, на первый слой которого должны последовательно поступать коэффициенты разложений функций, на третьем слое ожидаются окончательные результаты – спектральные представления производных соответствующих функций, а на втором (промежуточном) слое будет осуществляться каскад коэффициентов, как показано на рисунке 4.3.2..

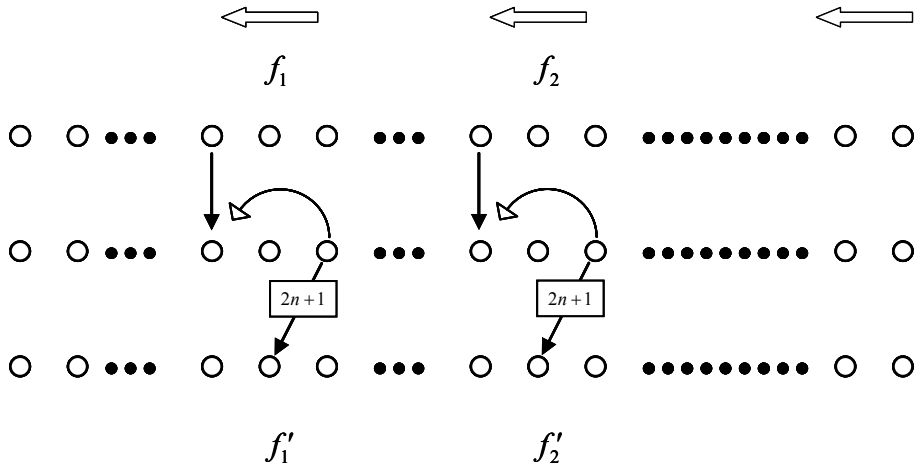


Рис. 4.3.2. Конвейерный способ реализации вычислений в виде спектральных каскада и диффузии.

Так мы показали, что на этапах спектральных каскада и диффузии коэффициентов легко предложить общий, универсальный принцип распараллеливания вычислительного процесса, применяя при этом соответственно конвейеризацию и векторизацию вычислений.

Отметим, что подобно тому, как сложные электрические схемы собираются из более простых блоков, схемы вычислительного процесса для сложных преобразований функций, например как для функционала (4.1.1), также могут быть представлены в виде соединения схем, соответствующих более простым преобразований, суперпозиция которых определят этот функционал. Этот замечательный факт в будущем позволит универсальным образом строить схемы для сверхбыстрого осуществления заданных сложных преобразований функций, что повысит производительность вычислительных систем в решении множества прикладных задач, как реального, так и архивного времени исполнения.

Анализируя предложенный принцип распараллеленных вычислений внутриспектральных преобразований, приходим к оценке временной сложности соответствующих алгоритмов:

$$O(k\,N/P + \tau\,NP),$$

где k, τ – коэффициенты, зависящие соответственно от скорости вычислений на отдельном процессоре и скорости передачи данных в сети, а N, P – соответственно объем данных (число спектральных коэффициентов) и общее количество задействованных процессоров.

Следовательно, в условиях медленной передачи данных в сети не стоит допускать чрезмерного увеличения числа процессоров, а также при наличии высокопроизводительных вычислительных машин – в этом случае необходимо распределять вектора значений на достаточно крупные блоки данных. Обратно, если реализовать, например, детерминированную нейронную сеть, состоящую из множества маломощных процессоров (сумматоров), собранных в единый кристалл согласно топологии вычислительной схемы, то организованный подобным образом вычислитель при достаточно малом τ окажется наиболее быстрым и дешевым преобразователем функций спектрального представления.

Таким образом, мы показали, что изложенные в работе методы и принципы внутриспектральных преобразований функций допускают естественное обобщение в случае реализации на вычислительных системах с параллельной архитектурой исполнения команд.

Глава V
Применение быстрых спектральных преобразований

Данное место диссертационной работы посвящено описанию решения двух практических задач, успешно разрешенных при помощи разработанного математического аппарата аналитических преобразований сигналов. Одна из задач связана с применением алгебры спектральных преобразований в распознавании визуальных образов, другая – с поиском структурных закономерностей в генетических последовательностях. Ниже дано краткое описание каждой их этих практических задач с последующим описанием предложенных способов решения, основанных на применении аналитических преобразований спектральных представлений функций.

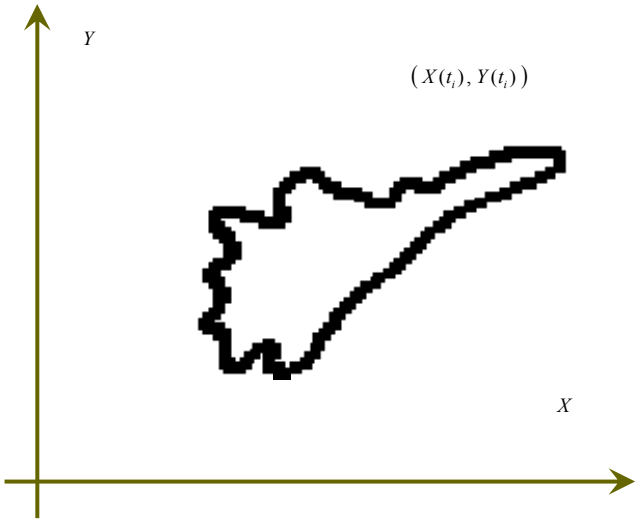
5.1 Применение в задачах распознавания образов

Сложные изображения объектов и сцен часто можно достаточно точно описать в виде комплекса геометрических примитивов, например, как набор кривых: используя определенные алгоритмы растровые изображения, переводят в векторные. Векторные представления обладают рядом преимуществ, особенно в задачах, сопряженных с распознаванием визуальных образов.

Известно, что также часто для распознавания визуального образа и идентификации объектов различной природы (рис. 5.1.1) достаточно располагать только контуром объекта, игнорируя цветовую составляющую визуального образа.

Рис. 5.1.1

В таких случаях распознавание визуального образа можно рассматривать лишь как распознавание контура объекта. Далее считаем, что контур объекта фактически является замкнутой кривой на плоскости, которая может быть представлена в параметрическом виде как пара функций: $\left(X(t_i), Y(t_i)\right)$.



$$\Rightarrow \begin{cases} X(t_i) \approx \sum_{n=0}^{N} A_n \varphi_n(t_i) \\ Y(t_i) \approx \sum_{n=0}^{N} B_n \varphi_n(t_i) \end{cases}$$

Рис. 5.1.2

Каждую из упомянутых функций, в свою очередь, можно представить в спектральном виде как ограниченный ортогональный ряд по некоторому базису (рис. 5.1.2). Причем, чем короче взят ортогональный ряд, тем более гладкое приближение контура мы получим при аппроксимативном восстановлении функций $\left(X(t_i), Y(t_i)\right)$.

Итак, представим каждую пространственную кривую в параметрическом виде как функции некоторой переменной (например, времени) и аппроксимируем их конечными ортогональными рядами. Проведение всестороннего анализа полученных кривых можно теперь построить на основе богатого математического наследия из таких известных областей как аналитическая геометрия и теория спектрального представления функций.

Сами коэффициенты разложения могут служить в качестве требуемых признаков при сравнении контуров. Действительно, несложно, например, дать оценку подобия контуров исходя из совпадения их аппроксимативных представлений. Алгоритмические действия при этом оказываются на порядки менее сложными, чем операции с растровыми изображениями. В последнее время в задачах распознавания образов успешно применяется следующий простой и эффективный способ: каждому образу сопоставляется некоторый признак или несколько признаков (часто количественных) таких, что несовпадение признаков двух образов свидетельствует об их несомненном различии, то есть совпадение признаков является необходимым условием для совпадения образов. Отметим, что точное совпадение признаков, однако не является достаточным основанием для утверждения идентичности этих образов.

Применение такого приема способно резко уменьшить объемы задействованной памяти и требуемых вычислений. Приведем один отвлеченный пример: анализ отпечатков пальцев является простым и надежным способом в деле поиска некоторого человека, если мы располагаем образцом – его дактилоскопическим снимком. Однако если мы дополнительно располагаем набором признаков (например: мужчина 25-35 лет, кареглазый, шатен), мы облегчим и значительно ускорим поиск за счет отсеивания образов, заведомо неподходящих.

Для произвольных кривых, в том числе замкнутых, то есть являющихся контурами некоторых плоских фигур, существует ряд естественных геометрических признаков, таких как длина, кривизна, центр тяжести и площадь фигуры. Рассмотрим здесь способ вычисления этих признаков исходя из принятого спектрального аппроксимативного представления.

Как уже упоминалось выше, аналитическая теория является хорошо разработанной областью математики и поэтому возникает устойчивое желание попытаться использовать в задаче распознавания контуров хорошо известные соотношения из аналитической геометрии. Сегодня для контуров существует множество аналитически описанных инвариантов, т.е. количественных характеристик, неизменных к различным преобразованиям фигуры: перемещению, вращению, сжатию и т.д. Однако многие из них, несмотря на ряд своих «аналитических» достоинств, не получили распространение, т.к. оказались практически бесполезными в реальных задачах. Один из примеров – аффинная длина дуги кривой:

$$l = \int_a^b \sqrt[3]{x''y' + x'y''}\, dt .$$

Подобные аналитические оценки до сих пор оставались по большей части теоретическими, ввиду точностной и временной сложности вычислений производных зашумленных функций высоких порядков. В представляемой диссертации это проблема была успешно решена.

Более простые оценки геометрических признаков также оказались легко вычисляемыми через спектральное представление контура. Например, следующие признаки:

Координаты центра масс контура:

$$x_c = \int_0^T x(t)\, dt ,$$

$$y_c = \int_0^T y(t)\, dt .$$

Площадь, ограниченная контуром:

$$S = \int_0^T y(t)x'(t)dt = \int_0^T x(t)y'(t)dt .$$

Периметр контура:

$$l = \int_0^T \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt .$$

В ходе выполнения диссертационной работы также был предложен ряд признаков и инвариантов контуров [*Публикации по теме диссертации* 4, 5, 8, 9], рассчитываемых в пространстве коэффициентов, таких как инварианты к выбору начальной точки обхода контура и др.

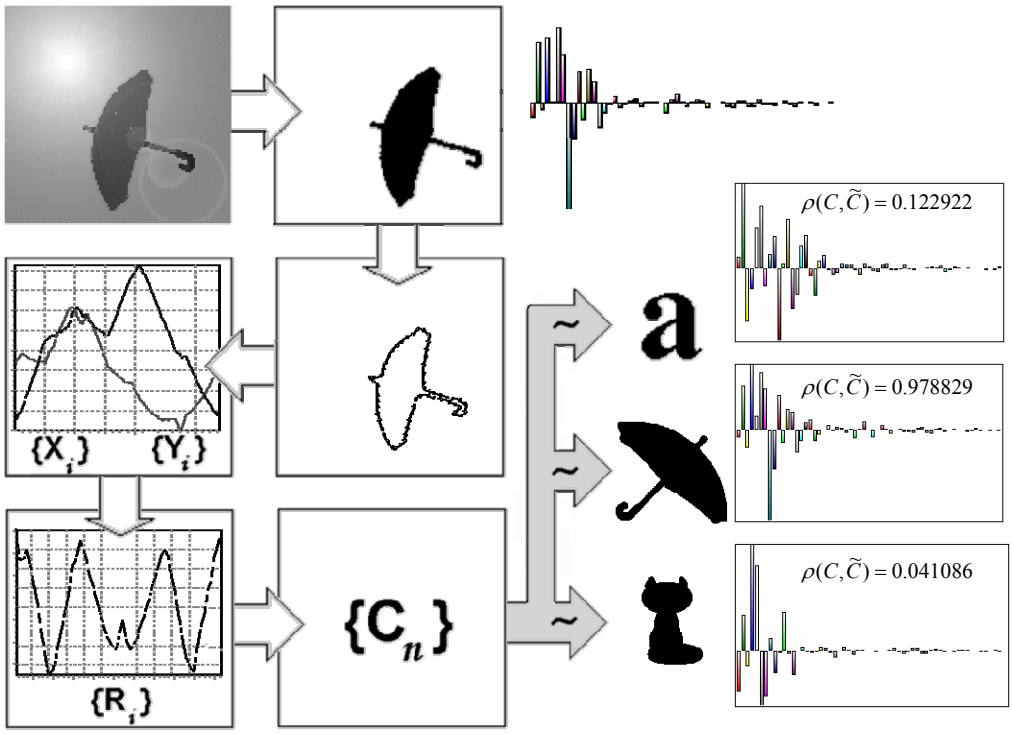


Рис. 5.1.3

Выше представлена общая применяемая схема распознавания контуров объектов. Здесь в качестве количественной оценки подобия используется коэффициент корреляции рядов признаков, причем значениям близким единице соответствует высокая вероятность подобия фигур.

Из представленных на рисунке 5.1.4 примеров видно, что предложенный метод распознавания приводит к оценкам, адекватным действительности (на рисунке графически отображены спектральные признаки контуров объектов).

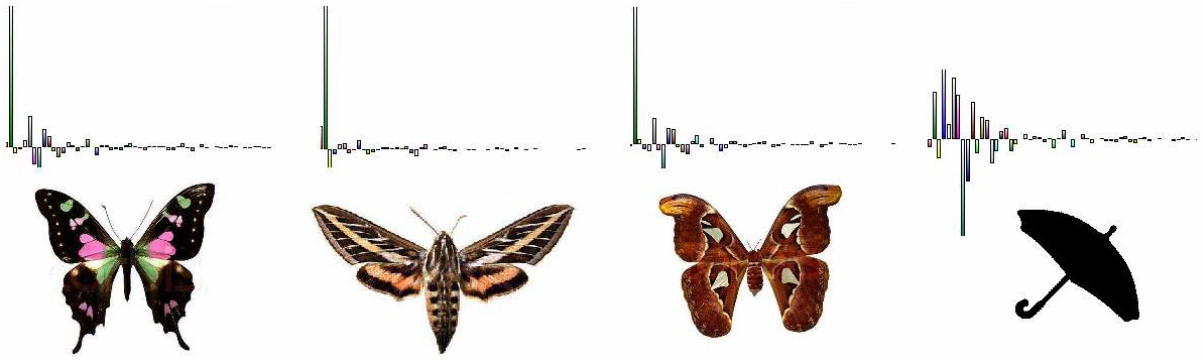


Рис. 5.1.4

Вычисление геометрических характеристик на практике встречает естественные ограничения, связанные с различного рода помехами. Поэтому применение для этих целей большинства численных методов оказывается трудоемким и зачастую дает неустойчивые результаты. Такое положение вынуждает отказываться от использования многих полезных геометрических признаков, инвариантов в пользу менее эффективных, но проще вычисляемых и более устойчивых.

Так, аффинная длина кривой как признак оказалась бы весьма полезной на практике, но она требует оперирования со вторыми производными, в то время как при вычислении площади фигуры, ограниченной кривой, используется лишь первые. Но при сжатии/сдвиге образа значение площади контура изменится, в отличие от аффинной длины, устойчивой ко всем аффинным преобразованиям кривых и, следовательно, являющейся более выгодным, информативным признаком образа.

Сглаживающая природа и аналитическая «целостность» спектрального представления являются явными преимуществами в решении задач распознавания плоских фигур и кривых. Благодаря таким свойствам мы

способны, на основании достаточно точного представления образа, быстро и легко вычислить значения его признаков.

Более того, заметим, что не случайно в качестве базиса были использованы ортогональные полиномы – такой выбор позволил нам получить устойчивые результаты при вычислении производных высоких порядков, в отличие от использования других базисов, к примеру, построенных на тригонометрических функциях.

Согласно выявленным в работе свойствам, мы можем производить основные геометрические операции над линиями в самом пространстве коэффициентов, используя при этом элементарные математические преобразования над коэффициентами разложения параметрически заданных контуров, что повышает производительность построенных на этом принципе алгоритмов при реализации на вычислительных машинах.

На основании найденных свойств также находятся критерии для количественной оценки других геометрических свойств и отношений рассматриваемых линий [*Публикации по теме диссертации 3,8*]: зеркальной симметрии, центральной симметрии линии, взаимных расположений и т.д. Так, к примеру, на практике удобно использовать в качестве критерия близости формы пары различных линий коэффициент корреляции соответствующих им рядов разложения $\{C_k\}$ и $\{\widetilde{C}_k\}$ от специальным образом построенной «линии курса» [*Публикации по теме диссертации 3*]. Тогда близость коэффициента корреляции к 1 будет интерпретироваться как степень подобия линий, а близость к (-1) – как степень подобия линий, но с отношением зеркальной симметрии.

Эффективность разработанной для данных целей теории преобразования отрезков ортогональных полиномиальных рядов позволяет надеяться на дальнейшее успешное применение данного спектрального подхода в различных областях науки и техники.

5.2 Применение в задачах биоинформатики

После того, как в молекулярной биологии стало возможно решение задачи секвенирования, целью которой является однозначное описание линейной структуры ДНК молекулы в виде текстовой последовательности из четырех букв (**A** – аденина, **T** – тимина, **G** – гуанина, **C** – цитозина), широко начали развиваться методы анализа генетических последовательностей, производимые посредством ЭВМ.

На основе применения разработанного математического аппарата в диссертационной работе была реализована алгоритмическая схема для решения одной из задач биоинформатики, посвященной изучению структурно-функциональной организации геномов – задача поиска тандемных повторов [*Публикации по теме диссертации* 2, 3, 10, 11, 12].

Одним из методов исследования статистических свойств полных геномов и их фрагментов является измерение количества информации (сложности) и связанной с нею величины – избыточности. Вообще, величины сложности и избыточности могут быть использованы для выделения периодичностей и статистически однородных зон при анализе протяженных символьных последовательностей.

Далее представлен новый метод, разработанный для решения задач связанных с поиском периодичностей в последовательностях ДНК. Тандемные повторы определяются длиной (длиной повторяющегося образца) и кратностью. Каждая копия образца и сам образец независимо подвергаются различного рода мутациям (замены, вставки и удаление отдельных элементов последовательности и т.д.). Копии образца, в результате, настолько дивергируют, что определение повторов на основе методов посимвольного сравнения становится крайне затруднительным. Рассматриваемая задача состоит в нахождении такого рода неточных повторов при неизвестных длине и кратности повторов.

Итак, известно, что ДНК молекулы подвержены многочисленным мутациям и множественное последовательное дублирование части ДНК (рис. 5.2.1) (*тандемные повторы*) – одни из видов мутаций, которые можно обнаружить в ходе численного анализа генетической последовательности:

Рис. 5.2.1

Продемонстрируем на примере также, так называемые, точечные мутации ДНК, приводящим к трем видам нарушений в генетических последовательностях: замене/вставке/изъятию одной из букв (рис. 5.2.2). Присутствие подобных искажений в изначально точных повторах способно сильно усложнить их обнаружение. В случае применения средств динамического программирования каждое нарушение текстового фрагмента приводит к многократному увеличению количества проверок на стадии анализа ДНК фрагмента.

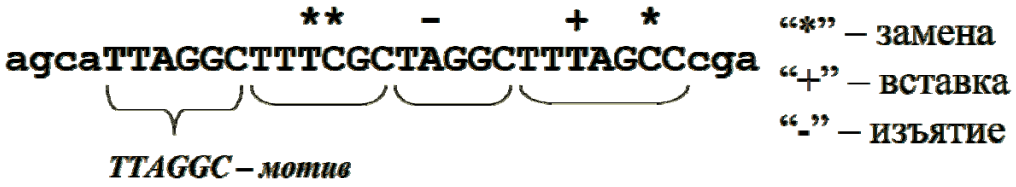


Рис. 5.2.2

Ввиду этого в данной проблематике получили развитие методы предварительной оценки текста, быстро обнаруживающие вероятные тандемные повторы и лишь потом подтверждающие их присутствие (или отсутствие) на этапе длительного анализа.

Вообще, работа с текстовыми фрагментами в работе не ведется вплоть до этапа анализа – все действия производятся с функциями особого вида, построенных как массивы некоторых количественных оценок последовательных фрагментов генетической последовательности, обычно называемых *профилями*. Опишем подробнее, как именно происходит переход «буквы–профиль» (буквы–функция). Отметим, что данный метод здесь описывается на примере работы с последовательностями ДНК (т.е. четырехбуквенным алфавитом) однако метод может быть применим без ограничения общности и на случай белковых последовательностей (т.е. 20-буквенным алфавитом).

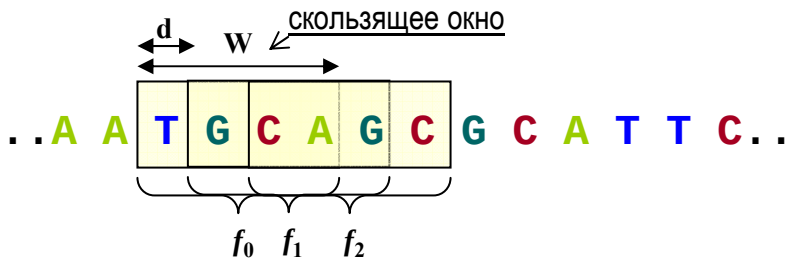


Рис. 5.2.3

Итак, прежде всего рассчитываются профили процентного содержания пар символов (G+C) и (G+A) в некотором скользящем окне (рис. 5.2.3) длины W на протяжении всей исследуемой последовательности S={ S_1, S_2,…, S_n,…,S_L}. Для работы с белками можно выделить другие наиболее удаленные в частотном плане пары символов аминокислотного алфавита, что обеспечит линейную независимость анализируемых профилей. Для каждой i-той позиции окна получим значения дискретных функций:

$$f_i^{(G,C)} = 1/N \cdot \sum_{n=i+1}^{i+N} \left|(S_n = G) \cup (S_n = C)\right|,$$

$$f_i^{(G,A)} = 1/N \cdot \sum_{n=i+1}^{i+N} \left|(S_n = G) \cup (S_n = A)\right|,$$

где i=1,2,…,L-N+1.

Для решения поставленной задачи будем использовать произведение полученных функций:

$$f_i = f_i^{(G,C)} \cdot f_i^{(G,A)}.$$

В дальнейшем будет рассматриваться лишь некоторое приближение определенной выше функции в виде конечного отрезка ортогонального ряда:

$$f_i \approx \sum_{j=0}^{K} C_j \varphi_j(t_i),$$

где $\{\varphi_j(t)\}$ - некоторая система ортогональных функций, $K \le N$ - глубина аппроксимативного приближения функции.

Утверждается, что на основании полученных коэффициентов разложения C_j для приближаемой функции f_i возможно локализовать места, в которых функция ведет себя периодично, либо приблизительно периодично, при этом дается количественная оценка степени периодичности функции f_i в i-той позиции. Так в работе впервые было предложено оценивать вероятность присутствия тандемных повторов по выраженности «периодичности» соответствующего фрагмента профиля, причем оценка осуществляется средствами представленного выше в работе математического аппарата.

Как нам удается локализовать неточную периодичность фрагментов профиля на основании лишь полученных коэффициентов разложения? Как количественно оценить «выраженность» повторов? Можно ли настроить поисковый аппарат на определенный диапазон длин фрагментов профиля (соответственно буквенных повторов в ДНК последовательностях)?

Для того, чтобы ответить на эти вопросы проследим следующее:

1. Ясно, что легко можно преобразовать коэффициенты разложения и получить вторую производную аппроксимации профиля.
2. Очевидно, что в тех местах, где некоторый фрагмент профиля повторен несколько раз (более 3-4 повторов), аппроксимация профиля будет близка по форме к некоторому гармоническому

сигналу (даже если изначально сами повторы профиля совпадали лишь приближено).

3. Если попарно сравнивать участки аппроксимации с участками ее второй производной, то степень корреляции может служить в качестве количественной оценки «меры периодичности» участка профиля.

Данный факт легко объяснить на основании соотношения, которое справедливо для любого гармонического сигнала

$$y'' = \alpha y .$$

Результатом тестовых запусков программного комплекса стало обнаружение множества действительных тандемных повторов генома бактерии Staphylococcus haemolitycus. Среди множества выявленных подтвержденных фрагментов имеются ряд повторов, обнаруженных ранее. Однако, как и ожидалось на ранних стадиях основания разработки, были выявлены новые фрагменты, ранее не известные. Как правило, новые обнаруженные повторы искаженны мутациями и требуют на стадии проверки (стадия 7) применения сторонних программ множественного выравнивания (Clustal и др.). Пример одного из таких, ранее не зарегистрированных повторов представлен на рисунке 5.2.4.

```
            ****     *    *  * *    *  *  *    ***
2586040: -ACATAC--CCAG--GAGGA-CTTTTA-CATGA--CCCAAAA
2586073: TACATTTTA-CACT-GAAAAGCGA--A-GA-GAT--TCAA-G
2586106: --CATTATT-GAAT--ATT--CTG-TAA-AGGATGACCAAAG
2586139: TTC-TAAAAATATTTTAACAACGGTATTTA--AT-GT-----
2586172: --C-TAA-TGGAAA--ATCAACGAACA-GAATATATTCAA--
2586205: --CAAAA---GAAT--ATGAACGAACA-GAAAACCGACAA-G
2586238: T-CA-AC---GAAA---TG-GCTATTATGAGCGCAGCCAAAG
```

Рис. 5.2.4. Обнаруженный фрагмент тандемных повторов (после множественного выравнивания)

Ниже представлена общая применяемая схема поиска тандемных повторов в генетических последовательностях. В качестве количественной оценки «меры периодичности» участка профиля используется функционал, зависящий от производных аппроксимации профиля высоких порядков.

№	Описание стадии процесса	Схематическое описание
1.	Загрузка фрагмента изучаемого генома из сети Internet (базы данных Genbank, Emboss, Entrez и др.)	БАНКИ ДНК
2.	Перевод текстового генетического фрагмента в функциональное пространство – вычисление «профиля» фрагмента (GC-состав)	
3.	Представление профиля в виде ортогонального ряда – перевод в пространство коэффициентов разложения $\{C_n\}$	$\{C_n\}$
4.	Осуществление преобразований в пространстве коэффициентов разложения, соответствующих дифференцированию профиля	$\{C_n\} \Rightarrow \{C'_n\}$
5.	Построение функционала на основе сличения профиля с производными профиля высоких порядков. Вид функционала основан на применении соотношений корреляционного анализа	$\{C_n\}$ $\{C'_n\}$ … $R(x)$
6.	Считая значения построенного функционала оценкой присутствия периодичности в профиле, сохраним интервалы, на которых функционал принимает значения выше заранее определенной пороговой величины	$R(x)$ A_i B_i
7.	Проверка на наличие тандемных повторов во фрагменте генетической последовательности, соответствующем максимуму функционала оценки периодичности профиля	A_i B_i ...ttaGCAAGCAAGCAAacttca...
8.	После успешного множественного выравнивания осуществляется занесение подтвержденных тандемных повторов в банк данных	БАНК тандемных повторов

Таблица 5.2.1. Общая схема поиска тандемных повторов в ДНК последовательностях.

Таким образом, на основании математического аппарата, описанного выше, разработан эффективный метод для поиска областей нуклеотидных последовательностей, содержащих периодичности. Преимущества метода во многом основаны на сочетании численных и аналитических подходов и особенно хорошо проявляются в случае обнаружения протяженных и сильно искаженных, неточных повторов в генетических последовательностях.

Традиционно положительным результатом проведения тестового эксперимента считается обнаружение всех ранее известных вхождений в исследуемой последовательности и таким образом подтвердить состоятельность разрабатываемого метода. Однако, как видно из результатов работы программы поиска, список найденных повторов оказался значительно более внушительным, включая помимо известных целый ряд новых тандемных повторов, ранее незарегистрированных.

Это позволяет заключить, что для случаев протяженных, многократных и сильно искаженных повторов предложенный метод анализа генетических последовательностей вполне может оказаться более эффективным и менее трудоемким, чем известные ранее методы.

В заключение заметим, что рассматриваемый подход предполагает естественное развитие и обобщение как до задачи поиска разнесенных неточных и протяженных повторов в белковых последовательностях, так и до поиска повторов в сигналах произвольной природы.

Работа проводилась при поддержке гранта РФФИ № 06-07-89274.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- ✓ В качестве достаточного условия реализуемости быстрых спектральных преобразований предложено «слабое» условие существования рекуррентных соотношений особого вида. Данное предположение сформулировано в диссертационной работе в виде теоремы и доказано.
- ✓ Сформулирована и доказана теорема о существовании рекуррентных соотношений особого вида для линейного оператора, если для обратного к нему оператора существует хотя бы одно подобное соотношение.
- ✓ Сформулирована и доказана лемма о существовании рекуррентных соотношений особого вида для суперпозиции двух линейных операторов, если подобные соотношения существуют для каждого из них.
- ✓ Рекуррентные соотношения особого вида получены для множества всех базисов классических ортогональных полиномов в отношении к основным, используемым на практике линейным операторам (умножение на рациональные функции, дифференцирование, интегрирование и т.д.).
- ✓ Предложена система правил для осуществления на практике быстрых аналитических преобразований над спектральным представлением функций, названная *алгеброй спектральных преобразований*. Вычисления, производимые над коэффициентами спектрального представления согласно двум основным из введенных правил, названы *спектральным каскадом* и *спектральной диффузией* коэффициентов.

- ✓ Реализован ряд программных продуктов, осуществляющих быстрые аналитические преобразования сигналов на основе соотношений алгебры спектральных преобразований.
- ✓ Применение разработанных программ в решении ряда практических задач показало действительную практическую ценность возможности осуществления на практике быстрого аналитического преобразования функций (сигналов) в задачах обработки данных произвольной природы в пространстве коэффициентов разложения.
- ✓ Зарегистрирована программа для ЭВМ *“SpectralRevisor”*, осуществляющая спектральный анализ данных на предмет обнаружения и локализации неточных периодов в сигналах.

ВЫВОДЫ

В данной работе автором были освещены широкие возможности практического применения ортогональных систем, построенных на классических ортогональных полиномах, и новые методы аналитической обработки сигналов, представленных рядами полиномов.

Во введении рассмотрена общая теория систем классических ортогональных полиномов непрерывного аргумента. Особое внимание уделено ортогональным системам Сонина-Лагерра, на примере которых в дальнейшем изложении были продемонстрированы основные результаты. Так, было показано, что на основании введенных модификаций полиномов и функций Сонина-Лагерра легко реализовать ряд адаптивных процедур в процессе аналитического описания поступающих сигналов.

В первой главе обсуждается возможность аналитической обработки функций на практике посредством изменения спектральных характеристик одномерных сигналов (функций), т.е. коэффициентов разложения спектрального представления. В ранних работах была показана возможность такой обработки, однако способы, предложенные раннее, сводились к длительным вычислениям на практике, зависящим от глубины аппроксимативного разложения сигналов с квадратом.

Во второй главе введен новый метод аналитической обработки сигналов, имеющий линейную зависимость длительности вычислений от глубины представления. Доказана применимость метода в общем случае для всех ортогональных систем и линейных преобразований, для которых существует рекуррентное соотношение вида (2.4.3), что, в частности, рассмотрено на множестве важных примеров. Также рассмотрены некоторые теоретические обобщения метода на случай суперпозиций и обратимости линейных операторов.

В третьей главе показано, как принципы аналитической спектральной обработки сигналов, изложенные ранее, могут служить для

реализации быстрых преобразований сигналов на практике. Введен метод спектральных каскада и диффузии, используемый для построения практической схемы быстрых преобразований функций (сигналов). В качестве примера предложена реализация схемы дифференцирования функции, представленной в виде ряда по полиномам Лагерра.

В четвертой главе показано, что изложенные в работе методы и принципы спектральной обработки функций (сигналов) допускают естественное обобщение и в случае реализации соответствующих преобразований сигналов на вычислительных системах с параллельной архитектурой исполнения команд. При этом дополнительного ускорения преобразований функций удается добиться за счет применения принципов векторизации и конвейеризации вычислений, а также благодаря возможности естественного разделения общей схемы более сложных вычислений на самостоятельные простые компоненты (элементарные блоки).

В данное время предложенные принципы работы с ортогональными рядами реализуются в виде законченных программных продуктов, ориентированных как на широкий спектр аналитических задач, так и на некоторые узко специализированные области обработки данных. Результаты работы созданного программного обеспечения полностью согласуются с теоретическими выводами, позволяя нам в дальнейшем судить о практической выгодности использования описанных здесь подходов.

Приведенные в диссертационной работе приложения содержат рекуррентные соотношения особого вида, найденные для систем классических ортогональных полиномов непрерывного и дискретного аргументов. Данные соотношения приведены в табличной форме и требуются для реализации спектральных преобразований на практике.

Отметим, что рекуррентные соотношения для полиномов Якоби и Гегенбауэра, соответствующие операторам дифференцирования и интегрирования, получены в рамках выполнения диссертационной работы.

В качестве основных выводов диссертационной работы автор видит следующее:

1. Создана система правил для аналитических преобразований сигналов, представленных рядами через классические ортогональные полиномы – *алгебра спектральных преобразований*.
2. Задача контурного распознавания визуальных объектов разрешена на основе аналитического вычисления инвариантных признаков контуров.
3. Задача поиска тандемных повторов в геномах разрешена на основе аналитической оценки степени «периодичности» профилей.
4. Применение в задачах обработки данных правил алгебры спектральных преобразований в пространстве коэффициентов разложения способно в значительной степени улучшить и ускорить результаты вычислений.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Ф.Ф.Дедус, Л.И.Куликова, А.Н.Панкратов, Р.К.Тетуев. Классические ортогональные базисы в задачах аналитического описания и обработки информационных, сигналов, Москва, издательский отдел факультета ВМК МГУ им.Ломоносова, 2004.
2. Ф.Ф. Дедус, Л.И. Куликова, С.А. Махортых, Н.Н. Назипова, А.Н.Панкратов, Р.К. Тетуев Аналитические методы распознавания повторяющихся структур в геномах. Доклады Академии Наук 2006, том 411, №5, с. 599-602.
3. Ф.Ф. Дедус, Л.И. Куликова, С.А. Махортых, Н.Н. Назипова, А.Н. Панкратов, Р.К. Тетуев, Распознавание структурно-функциональной организации генетических последовательностей, ТРУДЫ ВМК МГУ 2007, №2.
4. R. K. Tetuev, Recognition of Lines Detected in the Image Plane on the Basis of the Generalized Spectral-Analytical Method, Pattern Recognition and Image Analysis, Vol. 15, No. 2, 2005, pp. 334–337.
5. R. K. Tetouev, Contour Recognition Based on Spectral Methods. Solution of the Problem of Choice of the Start-Point, Pattern Recognition and Image Analysis, Vol. 17, No. 2, 2007, pp. 227–235.
6. Р.К. Тетуев, Ф.Ф. Дедус, Классические ортогональные полиномы. Применение в задачах обработки данных, препринт, М.: 11-й ФОРМАТ, 2007, 60 с.
7. Р.К. Тетуев “Аналитическое описание зашумленных исходных сигналов функциями Сонина-Лагерра и получение их первых производных” Математические Методы Распознавания Образов-11, Пущино, 20-26 ноября, 2003.

8. Ruslan Tetuev “About Curves Recognition Based on Generalized Spectral-Analytical Method” 7-th International Conference on Pattern Recognition And Image Analysis: New Information Technologies, St. Petersburg, Russia October 18-23, 2004.
9. Р.К.Тетуев “Вычисление некоторых геометрических характеристик плоских кривых на основе спектральных методов” Математические Методы Распознавания Образов-12, Москва, 20-26 ноября, 2005.
10. Ruslan Tetuev, Florencz Dedus, Lyudmila Kulikova, Sergey Makhortikh, Anton Pankratov, Nafisa Nazipova “Analytical methods in problems of recognition the structural and functional organization of genetic sequences”, The 2006 BGRS (Bioinformatics of the Genome Regulation and Structure) International Summer School for young scientists "Evolution, Systems Biology and High Performance Computing Bioinformatics", Novosibirsk, Russia July 12-15, 2006.
11. Р. К. Тетуев, Ф. Ф. Дедус, Л. И. Куликова, С. А. Махортых, Н. Н. Назипова, А. Н. Панкратов “Аналитические методы в проблемах распознавания структурно-функциональной организации генетических последовательностей” Математическая Биология и Биоинформатика, Пущино, 9-15 октября 2006.
12. Р.К. Тетуев, Ф.Ф. Дедус, Н.Н. Назипова, С.А. Махортых, Л.И. Куликова, А.Н. Панкратов, М.М. Ольшевец Свидетельство Роспатента об официальной регистрации программы для ЭВМ №2007611639 «Спектральный анализ данных, поиск неточных периодов в сигналах «SpectralRevisor».

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Бейтман, А. Эрдейи, «Вычисление трансцендентных функций», том 2, Главная редакция физико-математической литературы, М. 1966 г., с. 156-223
2. Ф.Ф. Дедус, С.А. Махортых, М.Н. Устинин, А.Ф. Дедус, «Обобщенный спектрально-аналитический метод обработки информационных массивов», М., Машиностроене, 1999 г., с. 19-30.
3. А.И. Кропотов, «Николай Яковлевич Сонин», Л., Наука, 1967 г.
4. Ф.Ф. Дедус, Л.И. Куликова, А.Н. Панкратов, Р.К. Тетуев «Классические ортогональные базисы в задачах аналитического описания и обработки информационных сигналов», М., Факультет ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова, 2004 г., с. 8-63.
5. П.Л. Чебышев «Вопросы о наименьших величинах, связанных с приближенным представленных функций», том 2., М.-Л., 1947 г., с. 151-235.
6. А.Ф. Никифоров, В.Б. Уваров, «Специальные функции математической физики», М., Наука, 1978 г.
7. Г.П. Толстов «Ряды Фурье», изд. 2, М.: Физматгиз, 1960 г. 390 с.
8. И.П. Натансон «Теория функций вещественной переменной» изд. 2, М.: Гостехиздат, 1957 г.
9. С. Качмаж, С. Штейнгауз «Теория ортогональных рядов», М.: Физматгиз, 1958 г.
10. Математический энциклопедический словарь (гл. редактор Ю. В. Прохоров), М.: Советская энциклопедия, 1988 г.
11. A.K.Britenkov, A.N.Pankratov Stable Algorithms of Adaptive Approximation for Acoustic Signals Description by Orthogonal Polynomials// Physics of Wave Phenomena, 2004, Vol.12, №3, pp.168-174

12. А.Н.Панкратов, А.К.Бритенков Обобщенный спектрально-аналитический метод: проблемы описания цифровых данных семействами ортогональных полиномов// Вестник Нижегородского государственного университета им. Н.И.Лобачевского. Серия Радиофизика. Вып. 1(2). - Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2004, с.5-14
13. Никифоров А.Ф., Суслов С.К., Уваров В.Б. Классические ортогональные полиномы дискретной переменной. // М.: Наука. 1985. 216 с.
14. Ф. Трикоми «Дифференциальные уравнения», Изд. 2-е, М.: Едиториал УРСС, 2003. – 352 с.
15. О.С. Джунгурова «Реализация некоторых операций над отрезками ортогональных рядов полиномов Кравчука», Математические методы распознавания образов: 12-я Всероссийская конференция: Сборник докладов. – М.: МАКС Пресс, 2005. – 500 с.
16. Б. Бухберг, Ж. Калме, Э. Калтофен, Дж. Коллинз, М. Лауэр, Ж. Лафон, Р. Лоос, М. Минньотт, Й. Нойбюзер, А. Норманн, Ф. Уинклер, Я. Ван Хюльзен, «Компьютерная алгебра: Символьные и алгебраические вычисления» Пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 392 с.
17. Numerical Recipes On-Line, http://world.std.com/~nr/storefront.html.
18. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики, т. 1, М.-Л., Гостехиздат, 1951.
19. Новикова Д.А., Поволоцкий А.В. «Формулы для преобразования функций в пространстве коэффициентов разложения по базису полиномов Чебышева второго рода» – М.: Сборник статей молодых ученных ВМиК МГУ, 2007, выпуск №4, с. 1-8.
20. А.Н. Панкратов, «О реализации алгебраических операций над рядами ортогональных функций», Журнал вычислительной математики и математической физики, 2004, с. 2121-2127.
21. Дедус Ф.Ф., Гальченко А.А., Малахов В.Н. и др. Разработка методов и аппаратуры помехоустойчивого преобразования информации. Отчет

по НИР. Номер гос. регистрации 76047147. – Пущино: НИВЦ АН СССР, 1982.

22. Дедус Ф.Ф. Синтез алгоритмов аналитического представления адаптивного сжатия и интерпретации результатов экспериментальных исследований // Труды I-ой Международной школы молодых ученых "Автоматизация биотехнологических процессов и биологических экспериментов". – Варна, 1986.
23. Дедус Ф.Ф. Аналитическое представление экспериментальных данных и их обработка. Кибернетика и вычислительная техника. Вып. 74. – Киев: Наукова думка, 1987.
24. Armin P. Barth. Algorithmik fur Einsteiger. Vieweg, Braunschweig Wiesbaden, 2003.
25. Charles H. Bennett. ‘Logical Depth and Physical Complexity’. In Rolf Herken, editor, The Universal
26. Turing Machine. A Half-Century Survey, pages 207–235. Springer-Verlag, Wien, 1994.
27. Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, and Ronald L. Rivest. Introduction to Algorithms.
28. McGraw-Hill, New York, 1990.
29. Theodor Ellinger, Gunter Beuermann, and Rainer Leisten. Operations Research. EineEinfuhrung. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 4th edition, 1998.
30. Otto Forster. Analysis 1. Vieweg, Wiesbaden, 6. edition, 2001.
31. Ralf Hartmut Guting. Datenstrukturen und Algorithmen. B.G. Teubner, Stuttgart, 1997.
32. Volker Heun. Grundlegende Algorithmen. Vieweg, Braunschweig Wiesbaden, 2000.
33. Stephen C. Kleene. ‘Turing’s Analysis of Computability, and Major Applications of It’. In Rolf Herken, editor, The Universal Turing Machine. A Half-Century Survey, Wien, 1994. SpringerVerlag.

34. Donald E. Knuth. The Art of Computer Programming. 1. Fundamental Algorithms. Addison-Wesley, Reading, 3rd edition, 1997.
35. Donald E. Knuth. The Art of Computer Programming. 3rd Sorting and Searching. Addison-Wesley, Reading, 3rd edition, 1998.
36. Thomas Ottmann and PeterWidmayer. Algorithmen und Datenstrukturen. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg Berlin, 4rd edition, 2002.
37. Friedhelm Padberg. Elementare Zahlentheorie. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg Berlin, 2nd edition, 1996.
38. William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, and Brian P. Flannery. Numerical Recipes in C++. The Art of Scientific Computing. Cambridge University Press, Cambridge, 2nd edition, 2002.
39. Uwe Schoning. Algorithmen — kurzgefasst. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg und Berlin, 1997.
40. Robert Sedgewick. Algorithmen in C. Addison-Wesley, Bonn, 1992. 89
41. Andreas Solymosi and Ulrich Grude. Grundkurs Algorithmen und Datenstrukturen in Java. Vieweg, Braunschweig Wiesbaden, 2002.
42. Niklaus Wirth. Algorithmen und Datenstrukturen. B.G. Teubner, Stuttgart Leipzig, 1999.
43. Andreas de Vries “Algorithms and Data Structures”, VorlesungWirt-schaftsinformatik, 2005.
44. Sharma D, Issac B, Raghava GPS, Ramaswamy R (2004) Spectral Repeat Finder (SRF): identification of repetitive sequences using Fourier transformation. Bioinformatics, 20(9): 1405-1412
45. Korotkov EV, Korotkova MA, Kudryashov NA (2003) Information decomposition method to analyze symbolical sequences. Phys. Lett. A, 312: 198-210
46. Колмогоров А.Н. (1987) Теория информации и теория алгоритмов. М.: Наука, 213 с.
47. Шеннон К. (1963) Работы по теории информации и кибернетике. М.: Иностранная литература, 243 с.

48. Lempel A., Ziv J. (1976) On the Complexity of Finite Sequences. IEEE Transactions on Information Theory, V.IT-22, 75.
49. Гасфилд Д. (2003) Строки, деревья и последовательности в алгоритмах. СПб.: Невский проспект, с. 225. (Dan Gusfield (1997) Algorithms on String, Trees, and Sequences University of California, Davis, P. 255).
50. Watson J.D., Crick F.H.C. (1953) Molecular Structure of Deoxypentose Nucleic Acids. Nature, V. 171, p. 737.
51. Александров А.А. и др. (1990) Компьютерный анализ генетических текстов, М.:Наука, 264 с.
52. Горбань А.Н., Миркес Е.М., Попова Т.Г., Садовский М.Г. (1993) Новый подход к изучению статистических свойств генетических последовательностей. Биофизика, Т. 38, Вып. 5, с. 762-767.
53. Korotkov E.V., Korotkova M.A. (1995) Latent periodicity of DNA sequences from some human gene regions, DNA Seq., V.5, pp.353-358.
54. Benson G. (1999) Tandem repeats finder: a program to analyze DNA sequences, Nucl. Acids Res., V. 27, issue 2, pp. 573-580.
55. Noé L., Kucherov G. (2004) Improved hit criteria for DNA local alignment, BMC Bioinformatics, V. 5, 149 (http://www.biomedcentral.com/1471-2105/5/149).
56. Moore G.E. (1965) Cramming more components onto integrated circuits, Electronics Magazine, V. 38, no. 8, pp. 114-117.
57. Горелик А.Л., Скрипкин В.А. Методы распознавания. – М.: Высш. шк., 1977.
58. Дуда Р., Харт П. Распознавание образов и анализ сцен. – М.: Мир, 1976.
59. Загоруйко Н.Г. Методы распознавания и их применение. – М.: Сов. радио, 1972.
60. Патрик Э. Основы теории распознавания образов. – М.: Сов. радио, 1980.

61. Фу К.С. Последовательные методы в распознавании образов и обучении машин.– М.: Наука, 1971.
62. Фу К.С. Структурные методы в распознавании образов. – М.: Мир, 1977.
63. Kotel'nikov I.V. Algorithmic Models for Solving Pattern Recognition Problems // Pattern Recognition and Image Analysis, 1999. V. 9. № 1. P. 7.
64. Sergunin S.Yu., Kvashnin K.M., and M.I. Kumskov M.I. Image Representation in the Recognition Problem on the Basis of Symbol Marking of Its Singular Points // Pattern Recognition and Image Analysis, 2003. V. 13. № 1. P. 170.
65. Djukova E.V., Inyakin A.S., and Peskov N.V. Methods of Combinatorial Analysis in Synthesis of Efficient Recognition Algorithms // Pattern Recognition and Image Analysis, 2003. V. 13. № 2. P. 426.
66. Zagoruiko N.G., Pichueva A.G., Kutnenko O.A., Borisova I.A., Kochetov A.V., Ivanisenko V.A., Nikolaev S.V., Likhoshvai V.A., Ratushnyi A.V. and Kolchanov N.A. Methods of Pattern Recognition for Genetics // Pattern Recognition and Image Analysis, 2003. V. 13. No. 2. P. 193.
67. Kober V.I., M. G. Mozerov, J. Alvarez-Borrego and I. A. Ovseyevich. Nonlinear Image Processing with an Adaptive Structural Element // Pattern Recognition and Image Analysis, 2003. V. 13. No. 3. P. 476.
68. М.Н.Устинин, С.А.Махортых, А.М.Молчанов, М.М. Ольшевец, А.Н.Панкратов, Н.М.Панкратова, В.И.Сухарев, В.В.Сычев. Задачи анализа данных магнитной энцефалографии. В кн. Компьютеры и суперкомпьютеры в биологии. М.: Институт компьютерных технологий, 2002. С.327-349.
69. 4. С.А.Махортых, А.Н.Панкратов. О спектральном разложении нерегулярных кривых. – В кн. Доклады I Всероссийской конференции «Спектральные методы обработки информации в научных исследованиях» («Спектр – 2000»), М.: Алеф, 2000, 44-46.

70. Ф.Ф.Дедус. Аналитическое представление экспериментальных данных и их обработка. Кибернетика и вычислительная техника. Вып.74, «Наукова думка», Киев, 1987.
71. D.J. Lee, R. Schoenberger, D. Shiozawa, X. Xu, and P. Zhan, “Contour Matching for a Fish Recognition and Migration Monitoring System”, SPIE Optics East, Two and Three-Dimensional Vision Systems for Inspection, Control, and Metrology II, vol. 5606-05, Philadelphia, PA, USA, October 25-28, 2004.
72. S. Kiranyaz, K. Caglar, O. Guldogan, and E. Karaoglu, “MUVIS: A Multimedia Browsing, Indexing and Retrieval Framework”, Proc. of Third International Workshop on Content Based Multimedia Indexing, CBMI 2003, Rennes, France, 22-24 September 2003.
73. John Canny, "A Computational Approach to Edge Detection," IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 8, no. 6, pp. 679-698, November 1986.
74. D.J. Lee, R. Schoenberger, D. Shiozawa, X. Xu, and P. Zhan, “Contour Matching for a Fish Recognition and Migration Monitoring System”, SPIE Optics East, Two and Three-Dimensional Vision Systems for Inspection, Control, and Metrology II, vol. 5606-05, Philadelphia, PA, USA, October 25-28, 2004.
75. Serkan Kiranyaz, Miguel Ferreira and Moncef Gabbouj, “A novel feature extraction method based on segmentation over edge field for multimedia indexing and retrieval”, Institute of Signal Processing, Tampere University of Technology, Tampere, Finland.
76. Eli Saber, and A. Murat Tekalp, “Region-Based Shape Matching for Automatic Image Annotation and Query-by-Example” Journal of visual communication and image representation, Vol. 8, No. 1, March, pp. 3–20, 1997.

77. K. Arbter, W. E. Snyder, H. Burkhardt, and G. Hirzinger. Application of Affine-Invariant Fourier Descriptors to Recognition of 3-D Objects. IEEE Trans. Pattern Analy. Machine Intell., 12:640−647, 1990.

Приложение 1. Полезные формулы.

Дифференциальные уравнения:

$$(1-x^2)\left(P_n^{(\alpha,\beta)}\right)'' - ((\alpha+\beta+2)x+\alpha-\beta)\left(P_n^{(\alpha,\beta)}\right)' + n(n+\alpha+\beta+1)P_n^{(\alpha,\beta)} = 0;$$

$$(1-x^2)\left(C_n^{\lambda}\right)'' - (1+2\lambda)x\left(C_n^{\lambda}\right)' + n(n+2\lambda)C_n^{\lambda} = 0;$$

$$(1-x^2)T_n'' - xT_n' + n^2T_n = 0;$$

$$(1-x^2)U_n'' - 3xU_n' + n(n+2)U_n = 0;$$

$$(1-x^2)P_n'' - 2xP_n' + n(n+1)P_n = 0;$$

$$x\left(L_n^{\alpha}\right)'' - (x-\alpha-1)\left(L_n^{\alpha}\right)' + nL_n^{\alpha} = 0;$$

$$x\left(L_n\right)'' - (x-1)\left(L_n\right)' + nL_n = 0;$$

$$H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n = 0;$$

Формулы дифференцирования:

$$\left(P_n^{(\alpha,\beta)}\right)' = \frac{1}{2}(n+\alpha+\beta+1)P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)};$$

$$\left(C_n^{\lambda}\right)' = 2\lambda C_{n-1}^{\lambda+1};$$

$$\left(L_n^{\alpha}\right)' = -L_{n-1}^{\alpha+1};$$

$$H_n' = 2nH_{n-1}.$$

Рекуррентные формулы:

$$P_{n+1}^{(\alpha,\beta)} = \frac{2n+\alpha+\beta+1}{2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)}\left((2n+\alpha+\beta+2)x + \frac{\alpha^2-\beta^2}{2n+\alpha+\beta}\right)P_n^{(\alpha,\beta)} -$$

$$-\frac{(n+\alpha)(n+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}{(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)}P_{n-1}^{(\alpha,\beta)};$$

$$(n+1)C_{n+1}^{\lambda} = 2(n+\lambda)xC_n^{\lambda} - (n-2\lambda-1)C_{n-1}^{\lambda};$$

$$T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1};$$

$$U_{n+1} = 2xU_n - U_{n-1};$$

$$(n+1)P_{n+1} = (2n+1)xP_n - nP_{n-1};$$

$$(n+1)L_{n+1}^{(\alpha)} = (2n+\alpha+1-x)L_n^{(\alpha)} - (n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)};$$

$$(n+1)L_{n+1} = (2n+1-x)L_n - nL_{n-1};$$

$$H_{n+1} = 2xH_n - 2nH_{n-1}.$$

Связь между различными классическими ортогональными полиномами:

$$T_n = \frac{n!}{(1/2)_n} P_n^{(-1/2,-1/2)}; \qquad U_n = \frac{(n+1)!}{(3/2)_n} P_n^{(1/2,1/2)}; \qquad C_n^{\lambda} = \frac{(2\lambda)_n}{(\lambda+1/2)_n} P_n^{(\lambda-1/2,\lambda-1/2)};$$

$$P_n = P_n^{(0,0)}; \qquad U_n = \frac{1}{n+1} T'_{n+1}; \qquad L_n = L_n^0.$$

Линейная связь полиномов одного семейства:

$$P_n^{(\alpha,\beta)} = \frac{(n+\alpha+\beta+1)(n+\alpha+\beta+2)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)} P_n^{(\alpha+1,\beta+1)} + \frac{(\alpha-\beta)(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)} P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)} -$$

$$- \frac{(n+\alpha)(n+\beta)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)} P_{n-2}^{(\alpha+1,\beta+1)};$$

$$\frac{C_n^{\lambda}}{\lambda} = \frac{C_n^{\lambda+1} - C_{n-2}^{\lambda+1}}{\lambda+n}; \qquad L_n^{\alpha-1}(x) = L_n^{\alpha}(x) - L_{n-1}^{\alpha}(x).$$

Норма классических ортогональных полиномов:

$$\left\| P_n^{(\alpha,\beta)} \right\|^2 = \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)};$$

$$\left\| C_n^{\lambda} \right\|^2 = \frac{2^{2\lambda-1}(2\lambda)_n}{n!(n+\lambda)} \frac{\Gamma^2(\lambda+1/2)}{\Gamma(2\lambda)};$$

$$\left\| T_n \right\|^2 = \pi/2; \quad n \ge 1; \qquad \left\| T_0 \right\|^2 = \pi; \qquad \left\| L_n^{\alpha} \right\|^2 = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!};$$

$$\left\| U_n \right\|^2 = \pi/2; \qquad \left\| L_n \right\|^2 = 1;$$

$$\left\| P_n \right\|^2 = \frac{2}{2n+1}; \qquad \left\| H_n \right\|^2 = 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

Приложение 2. Соотношения вида (2.4.3), полученные для классических ортогональных полиномов и ряда элементарных (основных) линейных операторов.

Оператор $A(\varphi_n) = x\varphi_n$ *:*

$$xP_n^{(\alpha,\beta)} = \frac{2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)} P_{n+1}^{(\alpha,\beta)} + \frac{\beta^2-\alpha^2}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)} P_n^{(\alpha,\beta)} +$$

$$+ \frac{2(n+\alpha)(n+\beta)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)} P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}.$$

$$xC_n^{\lambda} = -\frac{n+1}{2(n+\lambda)} C_{n+1}^{\lambda} - \frac{n-2\lambda-1}{2(n+\lambda)} C_{n-1}^{\lambda};$$

$$xT_n = \frac{T_{n+1}+T_{n-1}}{2};$$

$$xU_n = \frac{U_{n+1}+U_{n-1}}{2};$$

$$xP_n = \frac{(n+1)P_{n+1}+nP_{n-1}}{2n+1};$$

$$xL_n^{\alpha} = -(n+1)L_{n+1}^{\alpha} + (2n+\alpha+1)L_n^{\alpha} - (n+\alpha)L_{n-1}^{\alpha};$$

$$xL_n = -(n+1)L_{n+1} + (2n+1)L_n - nL_{n-1};$$

$$xH_n = \frac{1}{2}H_{n+1} + nH_{n-1}.$$

Оператор $A(\varphi_n) = \varphi_n / x$ *:*

$$\left(\frac{P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}}{x}\right) = \frac{(\alpha^2-\beta^2)(2n+\alpha+\beta+1)}{2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)} \left(\frac{P_n^{(\alpha,\beta)}}{x}\right) -$$

$$- \frac{(n+\alpha)(n+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}{(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)} \left(\frac{P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}}{x}\right) + \frac{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)}{2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)} P_n^{(\alpha,\beta)}.$$

$$\left(\frac{C_{n+1}^{\lambda}}{x}\right) = \frac{2\lambda-n+1}{n+1} \left(\frac{C_{n-1}^{\lambda}}{x}\right) - \frac{2(n+\lambda)}{n+1} C_n^{\lambda};$$

$$\left(\frac{T_{n+1}}{x}\right) = -\left(\frac{T_{n-1}}{x}\right) + 2T_n;$$

$$\left(\frac{L_{n+1}^{\alpha}}{x}\right) = \frac{2n+\alpha+1}{n+1} \left(\frac{L_n^{\alpha}}{x}\right) - \frac{n+\alpha}{n+1} \left(\frac{L_{n-1}^{\alpha}}{x}\right) - \frac{L_n^{\alpha}}{n+1};$$

$$\left(\frac{U_{n+1}}{x}\right)=-\left(\frac{U_{n-1}}{x}\right)+2U_n;$$

$$\left(\frac{L_{n+1}}{x}\right)=-\frac{2n+1}{n+1}\left(\frac{L_n}{x}\right)+\frac{n}{n+1}\left(\frac{L_{n-1}}{x}\right)-\frac{L_n}{n+1};$$

$$\left(\frac{P_{n+1}}{x}\right)=-\frac{n}{n+1}\left(\frac{P_{n-1}}{x}\right)+\frac{2n+1}{n+1}P_n;$$

$$\left(\frac{H_{n+1}}{x}\right)=-2n\left(\frac{H_{n-1}}{x}\right)+2H_n.$$

Оператор $A(\varphi_n)=\int\varphi_n dx$ *:*

$$\int P_n^{(\alpha,\beta)}dx=\frac{2(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)}P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}+\frac{2(\alpha-\beta)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}P_n^{(\alpha,\beta)}-$$

$$-\frac{2(n+\alpha)(n+\beta)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)(n+\alpha+\beta)}P_{n-1}^{(\alpha,\beta)};$$

$$\int C_n^{\lambda}dx=\frac{C_{n+1}^{\lambda}-C_{n-1}^{\lambda}}{2(\lambda+n)};$$

$$\int T_n dx=\frac{T_{n+1}-T_{n-1}}{2n};$$

$$\int L_n^{\alpha}dx=-L_{n+1}^{\alpha}+L_n^{\alpha};$$

$$\int U_n dx=\frac{U_{n+1}-U_{n-1}}{2(n+1)};$$

$$\int L_n dx=-L_{n+1}+L_n;$$

$$\int P_n(x)dx=\frac{P_{n+1}(x)-P_{n-1}(x)}{2n+1};$$

$$\int H_n dx=\frac{H_{n+1}}{2(n+1)}.$$

Оператор $A(\varphi_n)=d\varphi_n/dx$ *:*

$$\left(P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}\right)'=-\frac{(\alpha-\beta)(2n+\alpha+\beta+1)}{(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)}\left(P_n^{(\alpha,\beta)}\right)'+$$

$$+\frac{(n+\alpha)(n+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}{(n+\alpha+\beta)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)}\left(P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}\right)'+\frac{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)}{2(n+\alpha+\beta+1)}P_n^{(\alpha,\beta)};$$

$$\left(C_{n+1}^{\lambda}\right)'=\left(C_{n-1}^{\lambda}\right)'+2(\lambda+n)C_n^{\lambda};$$

$$T'_{n+1}=T'_{n-1}+2nT_n;$$

$$\left(L_{n+1}^{\alpha}\right)'=\left(L_n^{\alpha}\right)'-L_n^{\alpha};$$

$$U'_{n+1}=U'_{n-1}+2(n+1)U_n;$$

$$L'_{n+1}=L'_n-L_n;$$

$$P'_{n+1}(x)=P'_{n-1}(x)+(2n+1)P_n(x);$$

$$H'_n=2nH_{n-1}.$$

Тетуев Руслан Курманбиевич
142290, г. Пущино, ул. Институтская 4, ИМПБ РАН
E-mail: radja@impb.ru